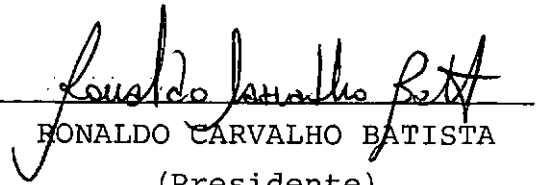


INSTABILIDADE E SENSIBILIDADE DE CASCAS CILÍNDRICAS  
CIRCUNFERENCIALMENTE ENRIJECIDAS

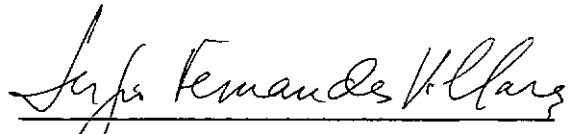
Paulo Batista Gonçalves

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE  
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JA  
NEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO  
GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

Aprovada por:

  
RONALDO CARVALHO BATISTA  
(Presidente)

  
RAUL ROSAS E SILVA

  
SERGIO FERNANDES VILLAÇA

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MARÇO DE 1983

GONÇALVES, PAULO BATISTA

Instabilidade e Sensibilidade de Cascas  
Cilíndricas Circunferencialmente Enrijeci-  
das (Rio de Janeiro) 1983.

IX, 129p. 29,7cm. (COPPE-UFRJ, M.Sc.,  
Engenharia Civil, 1983)

Tese - Univ. Federal Rio de Janeiro, Fac.  
de Engenharia.

1.Assunto I.COPPE/UFRJ II.Título (série)

"A

*Manoel e Suzana,  
meus pais".*

## AGRADECIMENTOS

*Ao Professor Ronaldo Carvalho Batista, pela solicitude e pela maneira amigável com que me orientou neste trabalho.*

*Aos colegas da COPPE, em especial a Manoel Justino Filho e aos amigos da RMCI.*

*Aos Professores da COPPE.*

*À CNEN e ao CNPq pelo apoio financeiro concedido.*

*A Beth pelos serviços de datilografia e Gilmar pela confecção gráfica deste trabalho.*

## RESUMO

*Uma análise da carga crítica e da sensibilidade a imperfeições de cascas cilíndricas enrijecidas por anéis sob pressão externa é aqui apresentada. A sensibilidade a imperfeições é avaliada em função do comportamento pós-crítico inicial da estrutura, determinado através da Teoria Geral da Estabilidade devida a Koiter.*

*O estudo é restrito aos casos onde os enrijecedores são de tal modo espaçados que o colapso local da casca é predominante. Os enrijecedores são esbeltos e igualmente espaçados e leva-se em conta o efeito da rigidez torsional e flexional dos mesmos sobre o comportamento da estrutura.*

*É desenvolvido um estudo paramétrico com a finalidade de determinar a influência dos parâmetros geométricos, tanto da casca quanto dos anéis, sobre a carga crítica e a sensibilidade a imperfeições.*

*A boa correlação entre resultados experimentais relatados na literatura, recomendações de normas e os resultados teóricos aqui obtidos parecem indicar que estes últimos podem ser usados com segurança no dimensionamento destas estruturas, constituindo em certos casos paramétricos uma base para futuras recomendações de projeto.*

## ABSTRACT

*An analysis of the buckling load and the imperfection-sensitivity of ring stiffened cylinders under external pressure is presented. Koiter's general post-buckling theory provides the basis to estimate the imperfection-sensitivity by relating it to the initial post-buckling behavior of the perfect structure.*

*Attention is restricted to cases in which the stiffeners are sufficiently widely spaced for local buckling to be the predominant mode. The stiffeners are light and equally spaced and their bending and torsional stiffness are taken into account.*

*A parametric study was developed and the effect of shell and ring geometric parameters on the buckling load and imperfection-sensitivity was evaluated.*

*Theoretical predictions are compared with available test results and recommended design curves and it is shown that the results here obtained are in good agreement with experimental results. The presented theoretical approach could serve then as a guideline for adequate choice of geometric parameters for design.*

## ÍNDICE

	Pag.
CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO .....	1
I.1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE ESTABILIDADE DE CASCAS ..	2
I.2 - ANÁLISE DE CASCAS CILÍNDRICAS ESBELTAS COM ENRIJECE- DORES ANULARES .....	3
I.3 - OBJETIVOS E PROCEDIMENTOS DO PRESENTE TRABALHO .....	7
CAPÍTULO II - ESTABILIDADE DE CASCAS CILÍNDRICAS GEOMETRI- CAMENTE PERFEITAS COM ENRIJECEDORES ANULARES.	10
II.1 - HIPÓTESES GERAIS DE ANÁLISE .....	11
II.1.1 - Escolha das Funções Deslocamento .....	15
II.2 - FUNCIONAL DE ENERGIA .....	16
II.2.1 - Relações Deformação-Deslocamento para a Casca,	16
II.2.2.- Relações Deformação-Deslocamento para o Enrije cedor Anular .....	17
II.2.3.- Construção do Funcional de Energia .....	18
II.3 - ENERGIA POTENCIAL TOTAL NA FORMA INCREMENTAL .....	20
II.3.1 - Estado Fundamental .....	20
II.3.2 - Estado de Deformação Incremental .....	22
II.3.3 - Forma Incremental da Energia Potencial Total - $V :: \Phi$ .....	22
II.4 - ANÁLISE DA BIFURCAÇÃO .....	25
II.4.1 - Equações de Equilíbrio Crítico e Condições de Contorno Associadas .....	26
II.4.2 - Resolução do Problema de Bifurcação .....	29

II.4.2.1 - Escolha das Funções Aproximadas para o Modo Crítico $\underline{U}_1$ .....	29
II.4.2.2 - Dedução dos Coeficientes do Sistema $[\underline{A} + \phi \underline{B}]\underline{X} = 0$ .....	31
II.5 - ANÁLISE CLÁSSICA DE CASCAS ENRIJECIDAS BIAPOIADAS ..	33
CAPÍTULO III - CARGAS E MODOS DE BIFURCAÇÃO: RESULTADOS NUMÉRICOS .....	38
III.1 - IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DO CÁLCULO .....	39
III.2 - ANÁLISE DOS RESULTADOS NUMÉRICOS REFERENTES À CASCA SIMPLEMENTE APOIADA .....	40
III.3 - ANÁLISE DOS RESULTADOS NUMÉRICOS REFERENTES À CASCA ENRIJECIDA .....	46
CAPÍTULO IV - ANÁLISE ASSINTÓTICA DO CAMINHO PÓS-CRÍTICO..	58
IV.1 - ANÁLISE DA ESTABILIDADE DE ESTADOS PÓS-CRÍTICOS INICIAIS .....	59
IV.2 - CÁLCULO DO CAMPO DE DESLOCAMENTOS $\underline{U}_2$ .....	61
IV.3 - CÁLCULO DA CURVATURA DO CAMINHO PÓS-CRÍTICO EM $\phi = \phi_{cr}$ .....	71
IV.4 - CÁLCULO DE $\phi_2$ PARA CASCA SIMPLEMENTE APOIADA ...	75
CAPÍTULO V - COMPORTAMENTO PÓS-CRÍTICO INICIAL E SENSIBILIDADE A IMPERFEIÇÕES: RESULTADOS NUMÉRICOS .....	79
V.1 - IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA .....	80



V.2 - RESULTADOS REFERENTES AO CAMINHO PÓS-CRÍTICO INICIAL DA CASCA ISOTRÓPICA .....	80
V.3 - RESULTADOS REFERENTES AO CAMINHO PÓS-CRÍTICO INICIAL DA CASCA ENRIJECIDA .....	90
CAPÍTULO VI - CORRELAÇÃO ENTRE RESULTADOS TEÓRICOS E EXPERIMENTAIS .....	94
VI.1 - INTRODUÇÃO .....	95
VI.2 - ANÁLISE DA CARGA DE FLAMBAGEM DE CASCAS CILÍNDRICAS SIMPLEMENTE APOIADAS .....	97
VI.3 - RESULTADOS TEÓRICOS E EXPERIMENTAIS RELATIVOS À CARGA DE FLAMBAGEM DA CASCA ENRIJECIDA .....	105
CAPÍTULO VII - CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	111
LISTA DE SÍMBOLOS .....	116
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	123

## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

## CAPÍTULO I

## INTRODUÇÃO

## I.1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE ESTABILIDADE DE CASCAS

Cascas esbeltas têm sido frequentemente usadas na construção de silos, cobertura de grandes espaços, depósitos de fluidos e também na construção de painéis enrijecidos os quais são largamente empregados na indústria naval, aeroespacial, petroquímica e, mais recentemente, na indústria nuclear para construção de componentes de reatores e nas estruturas off-shore.

Uma das propriedades das cascas esbeltas é que a rigidez de membrana é superior à rigidez à flexão, podendo, sob cargas apropriadas, absorver grande quantidade de energia de membrana sem sofrer grandes deformações. Se uma casca é carregada de tal maneira que a maior parte da energia é de membrana e se há um caminho em que esta energia de membrana pode se converter em energia de flexão, a casca pode ruir de maneira catastrófica em um processo denominado flambagem.

Para que se possa dimensionar com eficiência uma casca esbelta, evitando a ruína catastrófica da mesma, o projetista deve conhecer o seu mecanismo de instabilidade.

A análise clássica da estabilidade devida a Euler<sup>16</sup> se atém à procura da carga na qual uma configuração de equilíbrio vizinha à original deixa de ser estável e passa a ser neutra. Entretanto, para várias estruturas tais como cascas cilín-

dricas sob pressão axial ou radial e cascas esféricas sob pressão externa, dentre outras, sempre se notou uma grande discrepância entre a carga crítica teórica obtida pela teoria clássica e os resultados experimentais. Esta discrepância se manteve inexplicável por muitos anos. A teoria de Koiter<sup>4</sup> foi a primeira a dar uma explicação racional para o problema: o colapso se dá para uma carga menor que a prevista devido a presença de imperfeições geométricas na estrutura real.

Como todas as estruturas são na realidade imperfeitas, é necessário, portanto, se saber se o comportamento estrutural não-linear é sensível a imperfeições iniciais.

Uma forma alternativa para a investigação deste fenômeno é dada pela teoria da estabilidade assintótica de Koiter, que analisa o comportamento da estrutura após a bifurcação, sendo válida na vizinhança do ponto crítico, dando informações qualitativas e quantitativas sobre a sensibilidade da estrutura a imperfeições iniciais.

## I.2 - ANÁLISE DE CASCAS CILÍNDRICAS ESBELTAS COM ENRIJECEDORES ANULARES

Em comparação com o grande número de pesquisas concernentes a cilindros sob compressão axial, com ou sem enrijecedores, cascas cilíndricas sob pressão externa com enrijecedores anulares têm recebido relativamente pouca atenção, principalmente em se tratando de cascas com enrijecedores espaçados (como as encontradas em estruturas off-shore e vasos de pressão). Esta defasagem tem sido por vezes atribuída<sup>2</sup> ao fato da análise pós-crí

tica para cilindros com anéis espaçados sob pressão externa ser mais complexa que para outros casos de carregamento e enrijecimento.

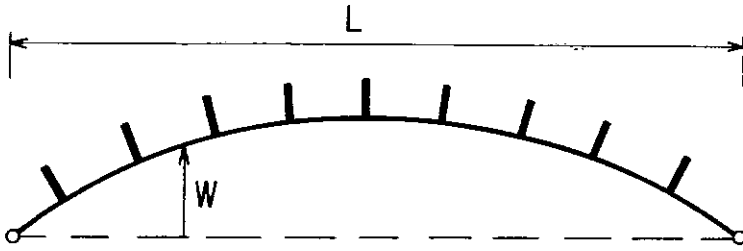
Este problema tem sido abordado sob diferentes enfoques em função do espaçamento dos enrijecedores e do tipo de instabilidade (local ou global) a ser analisado:

#### CASO A) Instabilidade Global - Anéis pouco Espaçados

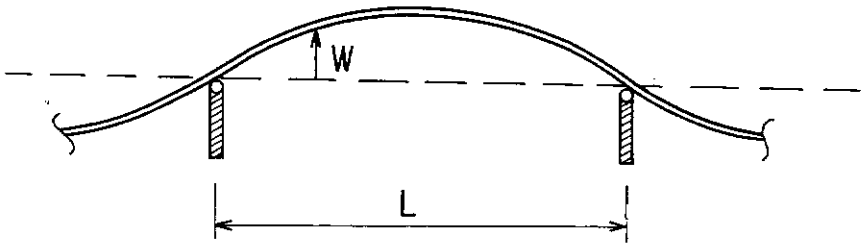
A maior parte das investigações estão limitadas a cascas cilíndricas esbeltas densamente enrijecidas por elementos leves, como os usados na indústria aeroespacial. Neste caso os enrijecedores têm sido considerados torsionalmente rígidos e são uniformemente distribuídos por toda a casca, permitindo que a estrutura seja tratada como uma casca simples de peso equivalente com propriedades ortotrópicas. O colapso se dá como se vê na figura (I.1a) de forma global como em cascas simples.

As equações para este tipo de análise foram desenvolvidas por Flügge<sup>17</sup> e a solução para cascas com enrijecedores anulares sob pressão lateral foi apresentada por Bodner<sup>18</sup>. Após Van der Neut<sup>19</sup> demonstrar em 1947 a influência da excentricidade dos enrijecedores sobre a carga crítica da casca, vários trabalhos incluindo o efeito da excentricidade foram publicados; dentre eles convém destacar os trabalhos de Wilson<sup>20</sup>, Baruch e Singer<sup>21</sup>, Czerwenka<sup>22</sup> e Kendrick<sup>23</sup>.

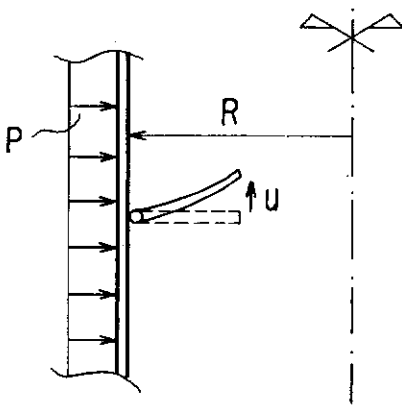
Estas análises apresentaram boa concordância entre resultados teóricos e experimentais quando os anéis eram bastante próximos, oferecendo, porém, resultados errôneas a medida que os enrijecedores se tornavam mais espaçados.



(a) INSTABILIDADE GLOBAL



(b) INSTABILIDADE LOCAL



(c) INSTABILIDADE DO ENRIJECEDOR

FIG. I.1 — INSTABILIDADE DE CASCAS CILÍNDRICAS COM ENRIJECEDORES ANULARES.

## CASO B) Instabilidade Global - Anéis com Grande Espaçamento

A instabilidade global para cilindros com anéis espaçados foi estudada por Yang e Kunoo<sup>2 4</sup> e MacNeal<sup>2 5</sup> que consideraram os anéis como elementos discretos não esbeltos, incluindo na análise a rigidez à flexão e a excentricidade do anel em relação à superfície média da casca, não se incluindo, contudo, a rigidez à torção. A carga crítica obtida nestes trabalhos foi na maioria dos casos bastante superior à carga crítica da casca simplesmente apoiada, o que não concorda com os dados experimentais.

Todos os trabalhos supracitados se atêm ao estudo da carga crítica e não oferecem nenhuma informação sobre o comportamento pós-crítico inicial das geometrias analisadas.

## CASO C) Instabilidade Local - Anéis com Grande Espaçamento

Com o desenvolvimento das pesquisas se verificou que para o caso de anéis espaçados poderia ocorrer o colapso por instabilidade local de um segmento cilíndrico entre dois enrijecedores, como se vê na fig. (I.1b), antes de ser atingida a carga crítica da estrutura referente ao colapso global.

Há poucas informações a respeito da análise do colapso local, exceção feita ao trabalho clássico de Budiansky<sup>1</sup> que determinou tanto a carga crítica quanto a sensibilidade a imperfeições. Neste trabalho a casca é considerada simplesmente apoiada sobre enrijecedores indeformáveis.

Limitações de peso obtidas em processos de otimização estrutural<sup>2 6, 3 3</sup> ditam que, assim como a casca, o enrijecedor deve ser esbelto, embora a compressão radial resultante sobre o mesmo possa fazer com que este entre em colapso (fig. I.1c). Neste

tipo de análise<sup>33</sup> a junção casca-anel tem sido considerada rotulada, desprezando-se, conseqüentemente, o efeito do acoplamento entre os modos de deformação.

É claro, entretanto, que a flambagem local da casca ou do enrijecedor não pode ocorrer independentemente como se vê nas figuras (I.1b e I.1c).

Hã, na realidade, interação entre as partes, podendo ocorrer acoplamento de diversos modos locais de casca devido à presença do enrijecedor e interação dos modos locais com os globais. Isto tende a provocar um comportamento diverso daquele esperado com a análise isolada de cada parte.

### I.3 - OBJETIVOS E PROCEDIMENTOS DO PRESENTE TRABALHO

O presente trabalho apresenta a análise da bifurcação e do comportamento pós-crítico inicial de um segmento cilíndrico localizado entre dois enrijecedores esbeltos, bastante espaçados, sob pressão externa (lateral ou hidrostática).

Faz-se uma análise paramétrica com a finalidade de se estabelecer a influência das características geométricas dos enrijecedores e da casca sobre a carga crítica, os modos críticos e o comportamento pós-crítico inicial.

Sendo as propriedades dos enrijecedores intimamente ligadas ao colapso local, ao contrário dos trabalhos citados no item anterior (item I.2), se considerou a deformação do anel, levando-se em conta as condições de compatibilidade na junção casca-enrijecedor.



Optou-se por uma análise assintótica da estrutura geometricamente perfeita por não haver até então na literatura nenhuma referência sobre o comportamento da casca levando-se em consideração a rigidez torsional dos anéis. Em outras palavras, inexistiam informações sobre formas e magnitudes de imperfeições iniciais, informações estas necessárias a uma análise não linear da estrutura imperfeita.

A formulação teórica aqui empregada é a versão de Seide<sup>6</sup> da teoria assintótica da estabilidade elástica devida a Koiter<sup>4</sup>.

No capítulo II são apresentadas as hipóteses básicas sobre a deformação da estrutura, estabelecidas as relações deformação-deslocamento e desenvolvido o estudo da bifurcação para a casca cilíndrica considerando a rigidez torsional do anel. Para efeito de comparação são também deduzidas as equações para cascas onde os anéis funcionam apenas como apoios simples. Os resultados numéricos desta análise são apresentados no capítulo III.

O estudo do caminho pós-crítico inicial é desenvolvido no capítulo IV para cascas simplesmente apoiadas com e sem enrijecedores, sendo os resultados numéricos relativos à estabilidade do ponto crítico apresentados no capítulo V.

No capítulo VI faz-se uma estimativa da carga de flambagem em função de imperfeições geométricas iniciais e uma comparação crítica dos resultados aqui obtidos com uma coletânea de resultados experimentais e cargas de projeto recomendadas por normas internacionais.

No capítulo VII, finalmente, são apresentadas observações e considerações gerais sobre os resultados obtidos para a

carga crítica e sensibilidade a imperfeições da casca enrijecida. São também feitas algumas sugestões para o desenvolvimento de futuras pesquisas sobre cilindros com enrijecedores anulares.

## CAPÍTULO II

ESTABILIDADE DE CASCAS CILÍNDRICAS GEOMETRICAMENTE  
PERFEITAS COM ENRIJECEDORES ANULARES

## CAPÍTULO II

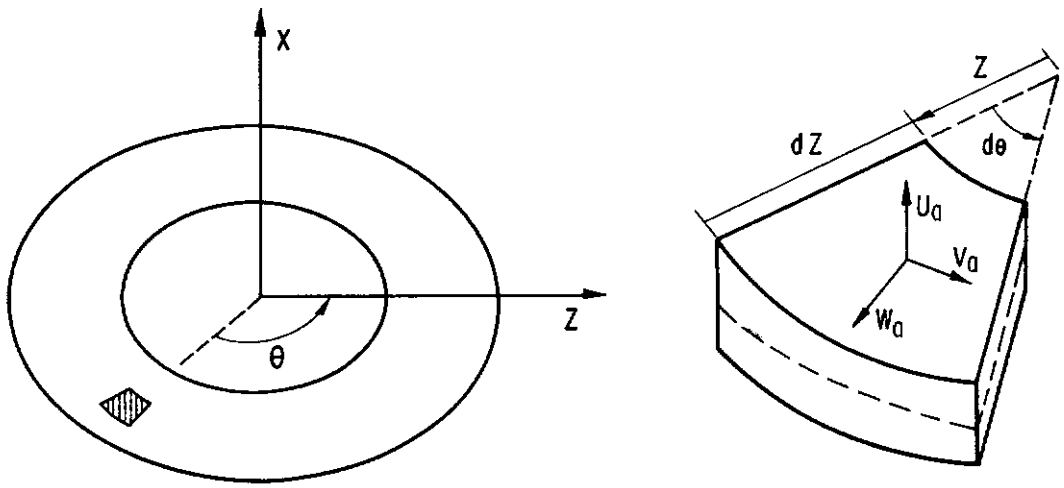
ESTABILIDADE DE CASCAS CILÍNDRICAS GEOMETRICAMENTE  
PERFEITAS COM ENRIJECEDORES ANULARES

## II.1 - HIPÓTESES GERAIS DE ANÁLISE

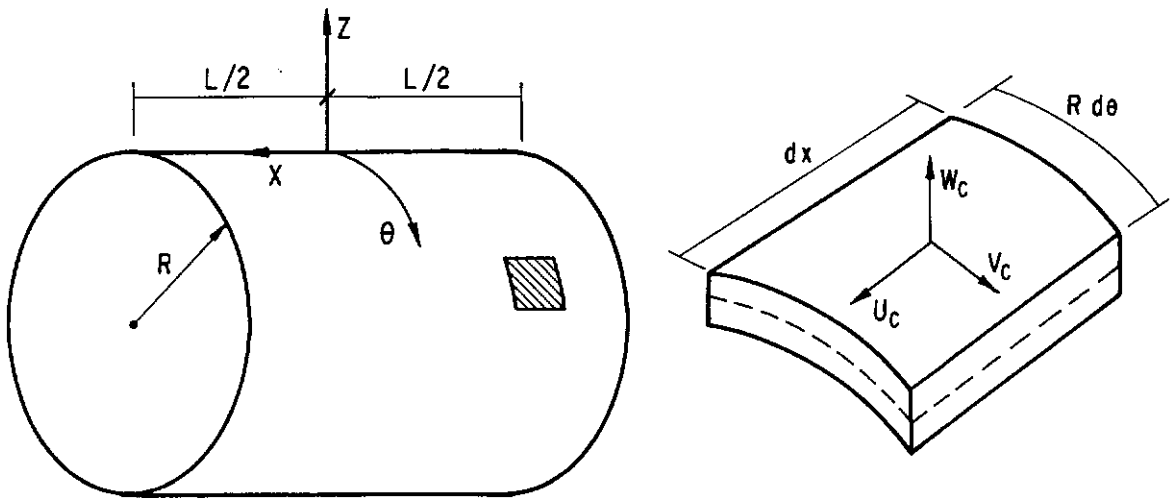
No presente trabalho, onde se pretende estudar o colapso da estrutura por instabilidade local, tomar-se-á como sistema estrutural a ser analisado um segmento cilíndrico contido entre dois enrijecedores esbeltos anulares. A geometria da casca e do enrijecedor, bem como o sistema de referência adotado para cada um dos elementos são apresentados nas figuras (II.1) e (II.2).

O estudo da estabilidade elástica do modelo físico aqui adotado, representado na figura (II.3), é feito seguindo a teoria de Koiter<sup>1</sup>. O modelo se constitui de uma casca cilíndrica esbelta apoiada sobre os enrijecedores tratados como placas anulares delgadas. É considerada a deformação do enrijecedor provocada pela deformação da casca através das relações de compatibilidade na junção casca-enrijecedor. O enrijecedor funciona, pois, como um apoio elástico com ação restritiva sobre as rotações. A posição do enrijecedor é descrita como uma descontinuidade linear através da função delta de Dirac.

São usadas na construção do funcional de energia expressões deformação-deslocamento não lineares tanto para a casca quanto para a placa. Desta maneira pode-se determinar não só a carga crítica da casca como também seu comportamento pós-crítico inicial e a influência do enrijecedor esbelto sobre os mesmos.



(a) ENRIJECADOR



(b) SEGMENTO CILÍNDRICO ENTRE DOIS ENRIJECADORES

FIG. II-1 - SISTEMA DE COORDENADAS DA CASCA E DO ENRIJECADOR.

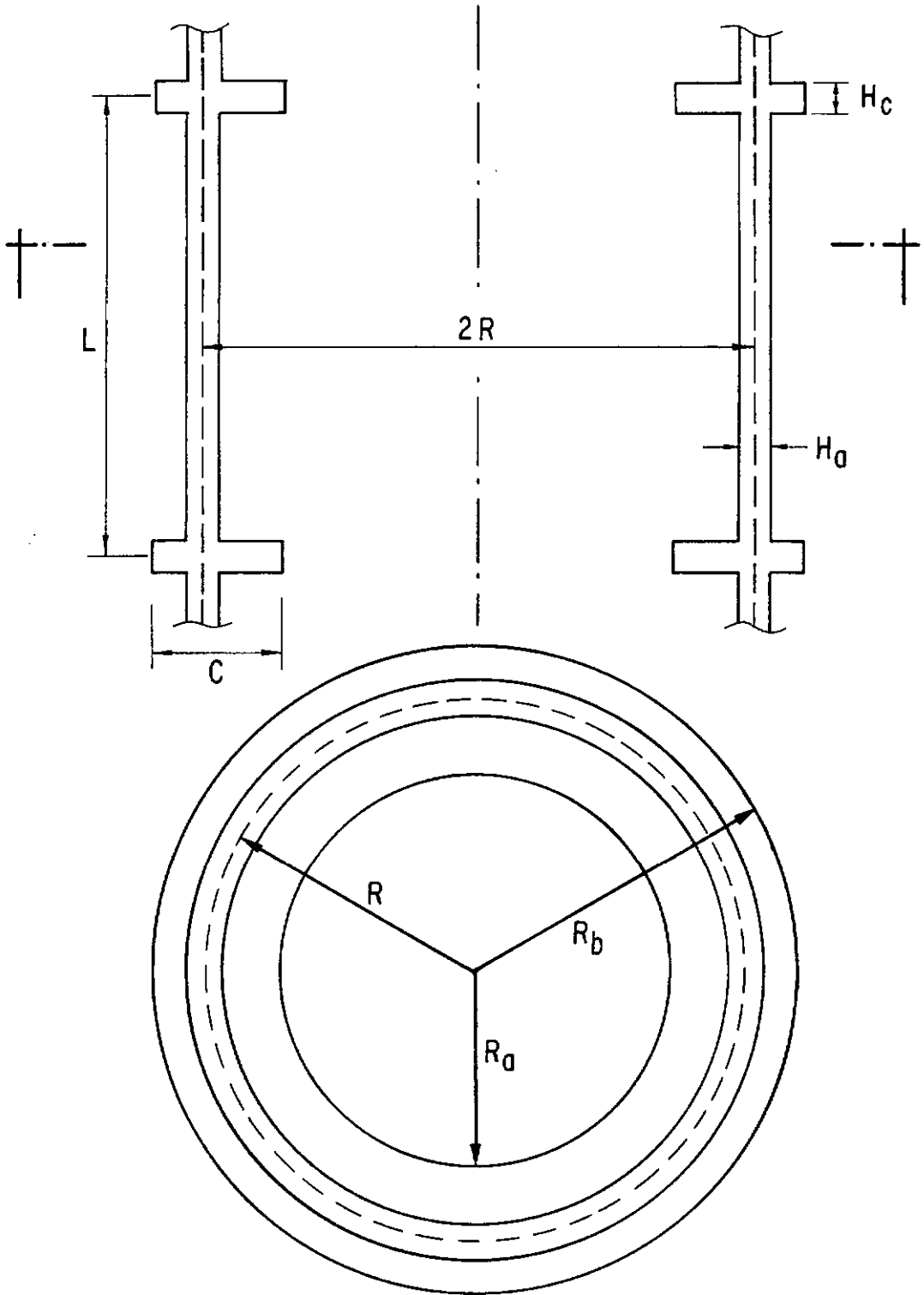
$$\xi = X/R$$

$$\zeta = Z/R$$

$$u = U/R$$

$$v = V/R$$

$$w = W/R$$



$$\lambda = L/R$$

$$\eta_c = H_c/R$$

$$r_a = R_a/R$$

$$\gamma = C/R$$

$$\eta_a = H_a/R$$

$$r_b = R_b/R$$

$$\epsilon = 1 - \frac{(r_a + r_b)}{2}$$

FIG. II-2 — NOTAÇÃO E GEOMETRIA DE UM SEGMENTO TÍPICO DO CILINDRO ENRIJECIDO.

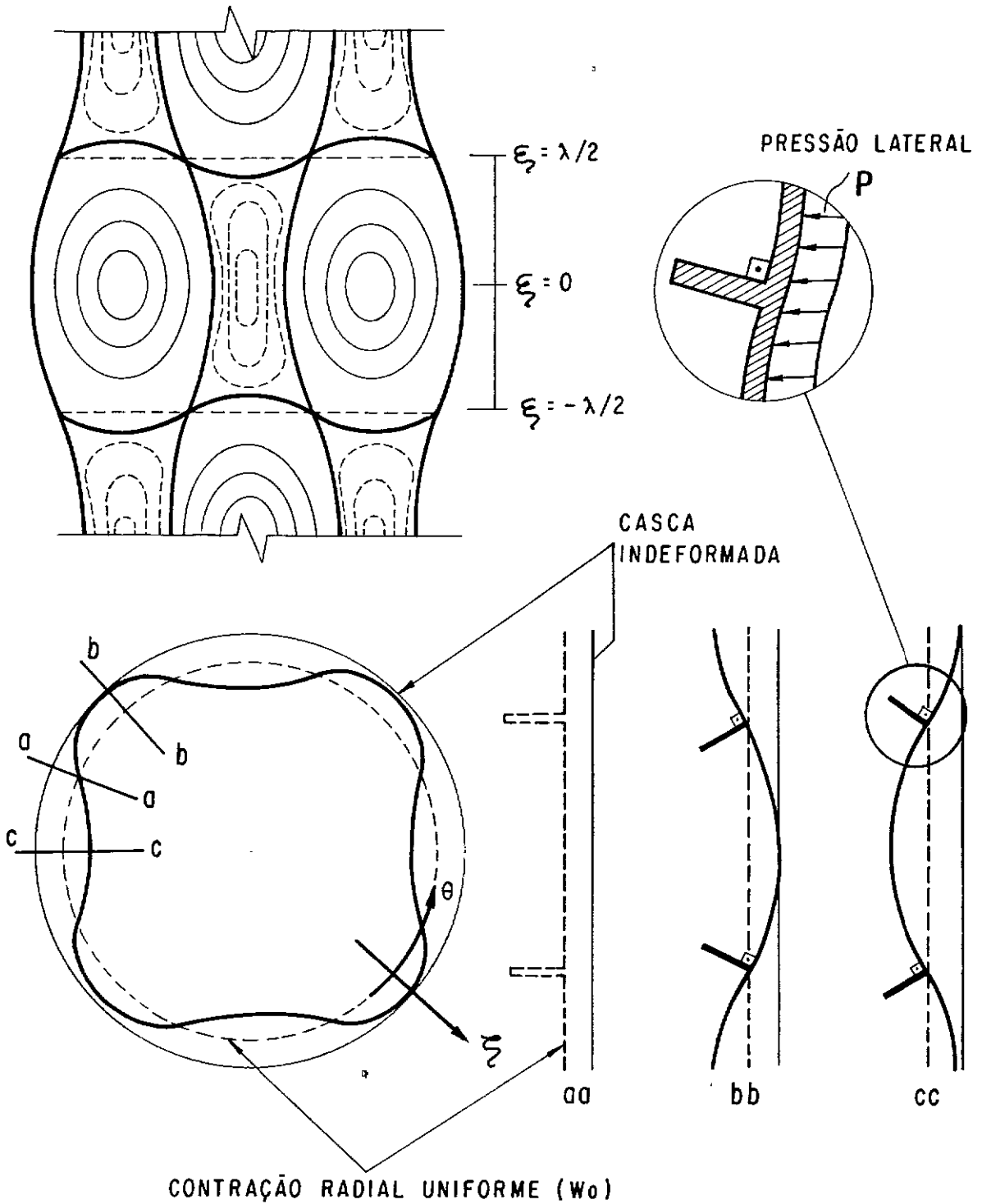


FIG. II-3 — ESTADO DE DEFORMAÇÃO DA CASCA ENRIJECIDA NO MODO CRÍTICO.

O conjunto casca-enrijecedores está submetido a uma pressão externa uniformemente distribuída de valor  $P$ .

Assume-se que o material, tanto da casca quanto dos enrijecedores, é elástico, homogêneo e isotrópico.

### II.1.1 - Escolha das Funções Deslocamento

Tem-se, a partir das hipóteses adotadas, as seguintes funções deslocamento para o cilindro:

A.1 - Em relação à superfície média do cilindro ( $\zeta = 1$ )

$$\begin{aligned} u_c(\xi, \theta) &= u_c(\xi, -\theta) \\ v_c(\xi, \theta) &= -v_c(\xi, -\theta) \\ w_c(\xi, \theta) &= w_c(\xi, -\theta) \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

A.2 - Em relação ao plano  $\xi = 0$

$$\begin{aligned} u_c(\xi, \theta) &= -u_c(-\xi, \theta) \\ v_c(\xi, \theta) &= v_c(-\xi, \theta) \\ w_c(\xi, \theta) &= w_c(-\xi, \theta) \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

Tomando-se como hipótese que ao passar da configuração pré-crítica para a pós-crítica o conjunto casca-enrijecedor se deforma como se vê na figura (II.3), tem-se as seguintes relações de compatibilidade em  $\xi = \pm \lambda/2$  e  $\zeta = 1$ .

$$\begin{aligned} u_{c, \pm \lambda/2}(\theta) &= u_a(1, \theta) \\ v_{c, \pm \lambda/2}(\theta) &= v_a(1, \theta) \\ w_{c, \pm \lambda/2}(\theta) &= w_a(1, \theta) \\ w_{c, \xi}(\pm \lambda/2, \theta) &= -u_{a, \zeta}(1, \theta) \\ w_{c, \theta}(\pm \lambda/2, \theta) &= -v_{a, \zeta}(1, \theta) \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$



A partir das relações de compatibilidade (II.3) e assumindo-se variações lineares em  $\zeta$ , as funções deslocamento para o enrijecedor são dadas por

$$\begin{aligned} u_a(\zeta, \theta) &= u_c(\lambda/2, \theta) - (1 - \zeta)w_{c,\xi}(\lambda/2, \theta) \\ v_a(\zeta, \theta) &= v_c(\lambda/2, \theta) - (1 - \zeta)w_{c,\theta}(\lambda/2, \theta) \\ w_a(\zeta, \theta) &= w_c(\lambda/2, \theta) \cdot \zeta \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

## II.2 - FUNCIONAL DE ENERGIA

No presente desenvolvimento serão seguidas as hipóteses usuais no estudo da estabilidade elástica de cascas, isto é, assume-se que as deformações específicas são sempre pequenas e o estado de tensão é considerado aproximadamente plano e paralelo à superfície média, seguindo as hipóteses de Kirchhof-Love.

### II.2.1 - Relações Deformações-Deslocamento para a Casca

Para o sistema de eixos apresentado na figura (II.1b) as deformações específicas de um ponto da superfície média da casca, já adimensionalizadas em relação ao seu raio,  $R$ , são dadas pelas expressões aproximadas usadas na conhecida Teoria de Donnell - Mushtari - Vlasov para cascas esbeltas abatidas,

$$\begin{aligned} \epsilon_\xi &= u_{,\xi} + 1/2 w_{,\xi}^2 \\ \epsilon_\theta &= (v_{,\theta} + w) + 1/2 w_{,\theta}^2 \\ \gamma_{\xi\theta} &= (u_{,\theta} + v_{,\xi}) + w_{,\xi} w_{,\theta} \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

e as mudanças de curvatura, também adimensionalizadas, dadas pelas expressões lineares,

$$k_{\xi} = (-1/R) w_{,\xi\xi}$$

$$k_{\theta} = (-1/R) w_{,\theta\theta}$$

(II.6)

$$k_{\theta\xi} = (-1/R) w_{,\xi\theta}$$

Convém aqui ressaltar que as expressões de Donnell têm sido usadas na maioria dos estudos de cascas cilíndricas completas sob pressão lateral e, como mostrou Brush e Almroth<sup>9</sup>, os resultados obtidos usando esta teoria não diferem dos resultados obtidos usando-se as expressões de deformação-deslocamento para cascas não abatidas, a não ser para cascas cujo parâmetro de Batdorf seja superior a  $10^4$ , campo este que está fora do âmbito de análise do presente trabalho.

### II.2.2 - Relações Deformação-Deslocamento para o Enrijecedor Anular

O enrijecedor esbelto será tratado como uma placa anular de raio interno  $R_A$  e raio externo  $R_B$ . Assumindo-se as hipóteses simplificadoras de Kirchhof, usar-se-ã para as deformações específicas e mudança de curvatura expressões aproximadas da Teoria de Von Karman para placas delgadas<sup>10</sup> deduzidas para o sistema de eixos visto na figura (II.1a).

Tem-se, pois, que as deformações específicas de um ponto da superfície média de uma placa são dadas por,

$$\epsilon_{\theta} = \frac{1}{\zeta} (v_{,\theta} + w) + \frac{1}{2\zeta^2} u_{,\theta}^2$$

$$\epsilon_{\zeta} = w_{,\zeta} + \frac{1}{2} u_{,\zeta}^2 \quad (II.7)$$

$$\gamma_{\theta\zeta} = \frac{1}{\zeta} w_{,\theta} + v_{,\zeta} - \frac{v}{\zeta} + \left( \frac{u_{,\zeta} u_{,\theta}}{\zeta} \right)$$

e as mudanças de curvatura dadas por

$$\begin{aligned}
 k_{\theta} &= \frac{1}{R} \left[ \frac{1}{\zeta^2} u_{,\theta\theta} + \frac{1}{\zeta} u_{,\zeta} \right] \\
 k_{\zeta} &= \frac{1}{R} u_{,\zeta\zeta} \\
 k_{\theta\zeta} &= \frac{1}{R} \left[ \frac{1}{\zeta} u_{,\theta\zeta} - \frac{1}{\zeta^2} u_{,\theta} \right]
 \end{aligned}
 \tag{II.8}$$

### II.2.3 - Construção do Funcional de Energia

O funcional para o sistema estrutural conservativo sob o carregamento "pseudo-estático" considerado é dado pela energia potencial total.

Tomando  $\underline{U}$  como vetor dos deslocamentos generalizados e  $\phi$  uma variável escalar relacionada ao carregamento (parâmetro de carga adimensional), a energia potencial total do sistema é dada por,

$$V = \frac{E H_C}{8(1 - \nu^2)} \phi \left[ \underline{U}(\phi), \phi \right] \tag{II.9}$$

onde

$$\phi = \sum_{i=1}^N \phi_c + \eta \sum_{i=1}^{N+1} \phi_a \tag{II.10}$$

onde  $\phi_c$  e  $\phi_a$  são, respectivamente, as contribuições de um segmento cilíndrico e de um enrijecedor para o funcional de energia  $V$ .

Assumindo relações constitutivas da forma,

$$\begin{aligned}
 N_{11} &= C (\epsilon_{11} + \nu \epsilon_{22}) \\
 N_{22} &= C (\epsilon_{22} + \nu \epsilon_{11}) \\
 N_{12} &= C (1 - \nu)^2 \gamma_{12}
 \end{aligned}
 \tag{II.11a}$$

$$M_{11} = \alpha R^2 C (K_{11} + \nu K_{22})$$

$$M_{22} = \alpha R^2 C (K_{22} + \nu K_{11}) \quad (\text{II.11b})$$

$$M_{12} = \alpha R^2 C (1 - \nu) K_{12}$$

e utilizando as relações não lineares de deformação-deslocamento dadas por (II.5), (II.6), (II.7) e (II.8), tem-se que as contribuições de energia em (II.10) são, em função dos deslocamentos, escritas como

$$\begin{aligned} \Phi_C = 4 \int_{-\lambda/2}^{+\lambda/2} \int_0^{2\pi} & u_{,\xi}^2 + u_{,\xi} w_{,\xi}^2 + \frac{1}{4} w_{,\xi}^4 + (v_{,\theta} + w)^2 + \\ & + (v_{,\theta} + w) w_{,\theta}^2 + \frac{1}{4} w_{,\theta}^4 + 2\nu \left[ u_{,\xi} (v_{,\theta} + w) + \frac{1}{2} (u_{,\xi} w_{,\theta}^2 + \right. \\ & + (v_{,\theta} + w) w_{,\xi}^2) + \frac{1}{4} w_{,\xi} w_{,\theta}^2 \left. \right] + \frac{(1-\nu)}{2} \left[ (u_{,\theta} + v_{,\xi})^2 + \right. \\ & + 2 (u_{,\theta} + v_{,\theta}) w_{,\xi} w_{,\theta} + w_{,\xi}^2 w_{,\theta}^2 \left. \right] + \alpha \left[ w_{,\xi\xi}^2 + w_{,\theta\theta}^2 + \right. \\ & + 2\nu w_{,\xi\xi} w_{,\theta\theta} + 2(1-\nu) w_{,\xi\theta}^2 \left. \right] - 2(1-\nu^2) \phi(w + u_{,\xi}/2) d\theta d\xi \quad (\text{II.12}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_a = 4 \int_{r_a}^{r_b} \int_0^{2\pi} & \frac{1}{\zeta^2} (v_{,\theta} + w)^2 + \frac{1}{\zeta^3} (v_{,\theta} + w) u_{,\theta}^2 + \frac{1}{4\zeta^4} u_{,\theta}^4 + \\ & + w_{,\zeta}^2 + w_{,\zeta} u_{,\zeta}^2 + \frac{1}{4} u_{,\zeta}^4 + 2\nu \left[ \frac{1}{\zeta} w_{,\zeta} (v_{,\theta} + w) + \right. \\ & + \frac{1}{2\zeta} (v_{,\theta} + w) u_{,\zeta}^2 + \frac{1}{2\zeta} w_{,\zeta} u_{,\theta}^2 + \frac{1}{4\zeta^2} u_{,\theta}^2 u_{,\zeta}^2 \left. \right] + \frac{(1-\nu)}{2} \left[ \left( \frac{1}{\zeta} w_{,\theta} + \right. \right. \\ & + v_{,\zeta} - \frac{\nu}{\zeta} + \frac{u_{,\zeta} u_{,\theta}}{\zeta} \left. \right)^2 \left. \right] + \alpha \eta^2 \left[ \left( \frac{1}{\zeta^2} u_{,\theta\theta} + \frac{1}{\zeta} u_{,\zeta} \right)^2 + u_{,\zeta\zeta}^2 + \right. \\ & + 2\nu u_{,\zeta\zeta} \left( \frac{1}{\zeta^2} u_{,\theta\theta} + \frac{1}{\zeta} u_{,\zeta} \right) + 2(1-\nu) \left( \frac{1}{\zeta} u_{,\theta\zeta} - \frac{1}{\zeta^2} u_{,\theta} \right)^2 \left. \right] \zeta d\theta d\zeta \quad (\text{II.13}) \end{aligned}$$

### II.3 - ENERGIA POTENCIAL TOTAL NA FORMA INCREMENTAL

Para uma estrutura, sob carregamento  $\phi$  fixado, estar em equilíbrio estável, é necessário e suficiente, de acordo com o critério de energia de Lagrange, que a energia potencial total tenha um mínimo relativo e completo em relação às energias potenciais totais associadas a todos os estados vizinhos cinematicamente admissíveis, isto é,

$$V(\underline{U}_0 + \underline{U}) > V(\underline{U}_0) \quad (\text{II.14})$$

onde  $\underline{U}_0$  representa o vetor deslocamento da estrutura deformada em um estado fundamental de equilíbrio e  $\underline{U}_0 + \underline{U}$  uma nova configuração em um estado vizinho arbitrário, sendo  $\underline{U}$  um pequeno deslocamento incremental cinematicamente admissível.

Se, ao contrário, for possível encontrar uma configuração vizinha à original em que

$$V(\underline{U}_0 + \underline{U}) < V(\underline{U}_0) \quad (\text{II.15})$$

temos o caso de instabilidade<sup>8</sup>.

Para se investigar a estabilidade de configurações de equilíbrio e o comportamento crítico, o campo de deslocamentos é assumido na forma incremental

$$\underline{U} = \underline{U}_0 + \underline{U}_1 \quad (\text{II.16})$$

onde  $\underline{U}_0$  e  $\underline{U}_1$  denotam respectivamente os deslocamentos fundamentais e incrementais adimensionalizadas.

#### II.3.1 - Estado Fundamental

Em configurações deformadas fundamentais são desprezadas, em interesse da simplicidade, as rotações pré-críticas da casca junto aos enrijecedores e apoios, como se mostra na figura

(II.4). Esta simplificação é usualmente empregada<sup>9, 3</sup>, assumindo-se então um estado fundamental de membrana. Esta suposição tem grande vantagem em termos analíticos já que teremos coeficientes constantes nas equações diferenciais de equilíbrio.

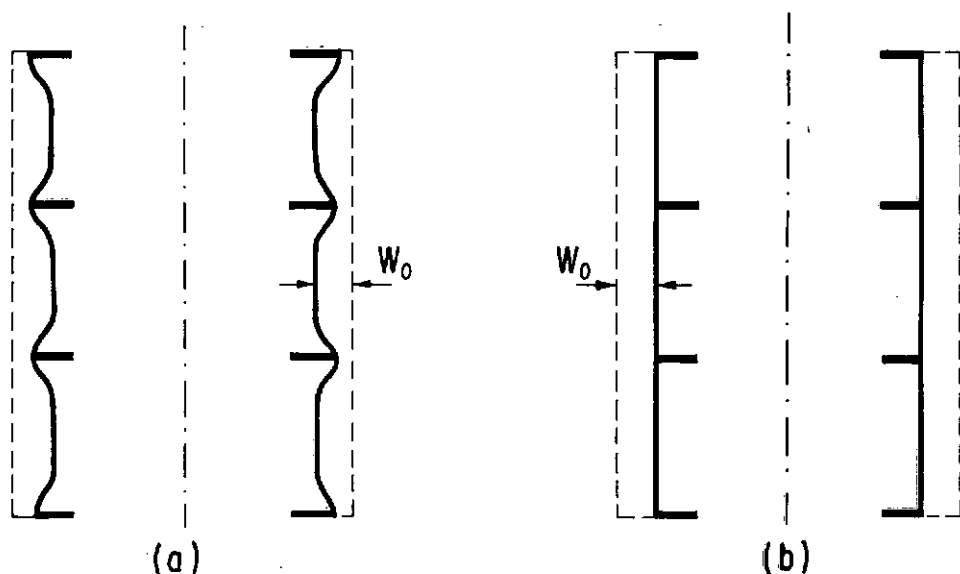


FIG. II-4 - CONFIGURAÇÃO FUNDAMENTAL DO CILINDRO ENRIJECIDO.

#### A - Solução Fundamental da Casca

Para uma casca cilíndrica sob pressão externa, tem-se a seguinte solução de membrana<sup>6</sup>,

$$\begin{aligned} u_{0,\xi} &= \phi (\nu - \beta) & \beta &= \begin{cases} 0 & \text{- pressão lateral} \\ 1/2 & \text{- pressão hidrostática} \end{cases} \\ v_0 &= 0 & & \\ w_0 &= -\phi (1 - \nu\beta) & \phi &= \frac{PR}{EH_c} \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

#### B - Solução Fundamental do Enrijecedor

Levando-se em conta as relações de compatibilidade (II.3) e as funções (II.4), tem-se para o enrijecedor,

$$\begin{aligned}
 u_{0,\zeta} &= 0 \\
 v_0 &= 0 \\
 w_{0,\zeta} &= -\phi (1 - \beta v)
 \end{aligned}
 \tag{II.18}$$

### II.3.2 - Estados de Deformação Incremental

Assume-se, baseando-se em observações experimentais<sup>12, 34</sup>, que a casca se deforma de maneira antimétrica em relação a cada enrijecedor (veja a figura (II.3)). Tendo em vista as hipóteses iniciais (II.1) e (II.2), conclui-se que  $v_{1c}$  e  $w_{1c}$  são nulos junto ao enrijecedor.

Da hipótese anterior e levando em consideração as condições de compatibilidade (II.3), tem-se para o enrijecedor,

$$\begin{aligned}
 u_{1a}(\zeta, \theta) &= u_{1c}(\lambda/2, \theta) - (1 - \zeta) w_{1c,\xi}(\lambda/2, \theta) \\
 v_{1a}(\zeta, \theta) &= 0 \\
 w_{1a}(\zeta, \theta) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{II.19}$$

### II.3.3 - Forma Incremental da Energia Potencial Total, $V::\Phi$

Observando que  $\underline{U}_0$  varia linearmente com  $\phi$  a medida que a carga aumenta a partir de zero e assumindo que  $\Phi$  é uma função analítica na vizinhança de um estado de equilíbrio  $\underline{U}_0(\phi)$ , pode-se escrever a energia potencial total em série de Taylor em termos do campo incremental de deslocamentos  $\underline{U}_1$ . Sendo as relações cinemáticas não lineares quadráticas, o funcional  $\Phi$  será de grau quártico em  $\underline{U}_1$  e a forma expandida é dada por

$$\begin{aligned}
 \Phi(\underline{U}_0 + \underline{U}_1, \phi) &= \Phi_0(\underline{U}_0, \phi) + \Phi_1(\underline{U}_1, \phi) + \Phi_2(\underline{U}_1, \phi) + \\
 &+ \Phi_3(\underline{U}_1, \phi) + \Phi_4(\underline{U}_1, \phi)
 \end{aligned}
 \tag{II.20}$$

sendo a variação total da energia escrita como

$$\Delta \Phi = \Phi(\underline{U}_0 + \underline{U}_1, \phi) - \Phi_0(\underline{U}_0, \phi) = \Phi_1(\underline{U}_1, \phi) + \Phi_2(\underline{U}_1, \phi) + \Phi_3(\underline{U}_1, \phi) + \Phi_4(\underline{U}_1, \phi) \quad (\text{II.21})$$

onde cada parcela  $\Phi_i(\underline{U}_1, \phi)$  contém todos os termos de  $i$ -ésimo grau em  $\underline{U}_1$ .

As contribuições de energia do funcional são definidas como,

$$\Phi_0(\underline{U}_0, \phi) = \Phi_{0c}(\underline{U}_0, \phi) + \eta \Phi_{0a}(\underline{U}_0, \phi) \quad (\text{II.22})$$

e

$$\Phi_j(\underline{U}_1, \phi) = \Phi_{jc}(\underline{U}_1, \phi) + \eta \Phi_{ja}(\underline{U}_1, \phi) \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (\text{II.23})$$

Substituindo-se (II.17) e (II.18) em (II.16) e, a seguir, substituindo-se (II.16) nos funcionais (II.12) e (II.13), e levando-se em conta que

$$v_{1a} = w_{1a} = 0 \quad (\text{II.24})$$

calcula-se a primeira, segunda, terceira e quarta variações de  $\Phi$  que equivalem, segundo uma definição formal, às derivadas de Frechet do funcional.

Para o segmento cilíndrico as contribuições de energia do funcional (II.21) são,

$$\begin{aligned} \Phi_{1c}(\underline{U}_1, \phi) = & 8 \int_{-\lambda/2}^{+\lambda/2} \int_0^{2\pi} u_{0,\xi} u_{1,\xi} + w_0 (v_{1,\theta} + w_1) + \\ & + v \left[ u_{0,\xi} (v_{1,\theta} + w_1) + w_0 u_{1,\xi} \right] - 2(1 - v^2) \phi (w_1 + \\ & + \beta u_{1,\xi}) d\theta d\xi \end{aligned} \quad (\text{II.25a})$$



$$\begin{aligned}
\Phi_{2c}(U_1, \phi) = & 4 \int_{-\lambda/2}^{+\lambda/2} \int_0^{2\pi} u_{1,\xi}^2 + (v_{1,\theta} + w_1)^2 + \\
& + 2v(u_{1,\xi} v_{1,\theta} + u_{1,\xi} w_1) + \frac{(1-v)}{2} (u_{1,\theta} + v_{1,\xi})^2 - \\
& - \phi(1-v^2) \left[ w_{1,\theta}^2 + \beta w_{1,\xi} \right] + \alpha \left[ w_{1,\xi\xi}^2 + w_{1,\theta\theta}^2 + 2v w_{1,\xi\xi} w_{1,\theta\theta} + \right. \\
& \left. + 2(1-v) w_{1,\xi\theta}^2 \right] d\theta d\xi \quad (II.25b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{3c}(U_1, \phi) = & 4 \int_{-\lambda/2}^{+\lambda/2} \int_0^{2\pi} u_{1,\xi} w_{1,\xi}^2 + (v_{1,\theta} + w_1) \\
& w_{1,\theta}^2 + v \left[ u_{1,\xi} w_{1,\theta}^2 + (v_{1,\theta} + w_1) w_{1,\xi}^2 \right] + \\
& + (1-v) w_{1,\xi} w_{1,\theta} (u_{1,\theta} + v_{1,\xi}) d\theta d\xi \quad (II.25c)
\end{aligned}$$

$$\Phi_{4c}(U_1, \phi) = \int_{-\lambda/2}^{+\lambda/2} \int_0^{2\pi} (w_{1,\xi}^2 + w_{1,\theta}^2)^2 d\theta d\xi \quad (II.25d)$$

Analogamente para o enrijecedor tem-se,

$$\Phi_{1a}(U_1, \phi) = 0 \quad (II.26a)$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{2a}(\underline{U}_1, \phi) = & 4 \int_{r_a}^{r_b} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{\zeta^3} w_0 u_{1,\theta}^2 + w_{0,\zeta} u_{1,\zeta}^2 + \right. \\
& 2\nu \left[ \frac{1}{2\zeta} w_0 u_{1,\zeta}^2 + \frac{1}{2\zeta^2} w_{0,\zeta} + u_{1,\theta}^2 \right] + \alpha \eta^2 \left[ \left( \frac{1}{\zeta^2} u_{1,\theta\theta} + \frac{1}{\zeta} u_{1,\zeta} \right)^2 + \right. \\
& \left. \left. + 2(1-\nu) \left( \frac{1}{\zeta} u_{1,\theta\zeta} - \frac{1}{\zeta^2} u_{1,\theta} \right)^2 \right] \right] \zeta d\theta d\zeta \quad (II.26b)
\end{aligned}$$

$$\Phi_{3a}(\underline{U}_1, \phi) = 0 \quad (II.26c)$$

$$\Phi_{4a}(\underline{U}_1, \phi) = \int_{r_a}^{r_b} \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{\zeta^2} u_{1,\theta} + u_{1,\zeta}^2 \right)^2 \zeta d\theta d\zeta \quad (II.26d)$$

#### II.4 - ANÁLISE DA BIFURCAÇÃO

O objetivo desta seção é determinar o ponto crítico ou de bifurcação,  $(\underline{U}, \phi) \equiv (\underline{U}_{0,cr}, \phi_{cr})$ , do caminho fundamental de equilíbrio através da solução das equações de equilíbrio crítico.

A solução pré-crítica para o vetor deslocamento  $\underline{U}_0$  é tal que faz com que a primeira variação da energia potencial total se anule, isto é,

$$\Phi_1(\underline{U}_1, \phi) = 0 \quad (II.27)$$

Em virtude da equação (II.27) a condição de estacionariedade do ponto crítico (ou de bifurcação) é expressa pela e-

quação variacional envolvendo a forma quadrática de  $\Phi$  em termos dos deslocamentos incrementais  $U_1$ ,

$$\delta \Phi_2 (U_1, \phi) = 0 \quad (\text{II.28})$$

onde

$$\Phi_2 = \Phi_{2c} + \eta \Phi_{2a} \quad (\text{II.29})$$

sendo  $\Phi_{2c}$  dado por (II.25b) e  $\Phi_{2a}$  dado por (II.26b).

Este critério para determinação de pontos críticos de equilíbrio é devido a Trefftz. O emprego deste critério fornece as equações de Euler-Lagrange do sistema.

Sendo a expressão (II.29) um funcional quadrático homogêneo, o problema variacional fornece um sistema homogêneo de equações diferenciais lineares e a solução do problema de autovvalor resultante fornece o valor da carga crítica,  $\phi_{cr}$ , e os modos críticos normalizados.

#### II.4.1 - Equações de Equilíbrio Crítico e Condições de Contorno Associadas.

Substituindo as funções (II.19) na equação (II.29) e a seguir (II.29) em (II.28), obtém-se a equação variacional (II.28) em função apenas dos deslocamentos da casca. A equação variacional (II.28) fornece, após a aplicação das operações usuais de cálculo variacional, o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{aligned}
& - u_{1,\xi\xi} - \frac{(1-\nu)}{2} u_{1,\theta\theta} - \frac{(1+\nu)}{2} v_{1,\xi\theta} - \nu w_{1,\xi} + \\
& + \delta \left\{ 2\eta\phi(1+\nu) \left[ C_3 u_{1,\theta\theta} + (C_3 - C_4) w_{1,\xi\theta\theta} \right] (1-\beta\nu) + \right. \\
& + 2\alpha\eta^3 \left[ C_1 (u_{1,\theta\theta\theta\theta} - 2(1-\nu) u_{1,\theta\theta}) + w_{1,\xi\theta\theta\theta\theta} (C_2 - C_1) + \right. \\
& \left. \left. + w_{1,\xi\theta\theta} (C_2 + 2(1-\nu) C_1) \right] \right\} = 0 \quad (\text{II.30a})
\end{aligned}$$

$$- \frac{(1+\nu)}{2} u_{1,\xi\theta} - v_{1,\theta\theta} - \frac{(1-\nu)}{2} v_{1,\xi\xi\xi} - w_{1,\theta} = 0 \quad (\text{II.30b})$$

$$\begin{aligned}
& \nu u_{1,\xi} + v_{1,\theta} + w_1 + \phi(1-\nu^2)(w_{1,\theta\theta} + \beta w_{1,\xi\xi}) + \alpha(w_{1,\xi\xi\xi\xi} + \\
& + 2w_{1,\xi\xi\theta\theta} + w_{1,\theta\theta\theta\theta}) + \delta \left\{ 2\eta\phi(1-\beta\nu)(1+\nu) \left[ u_{1,\theta\theta} (C_4 - C_3) + \right. \right. \\
& + w_{1,\xi\theta\theta} (C_3 - 2C_4 + C_5) + w_{,\xi} C_5 \left. \right] + 2\alpha\eta^3 \left[ u_{1,\theta\theta\theta\theta} (C_2 - C_1) + \right. \\
& + u_{1,\theta\theta} (C_2 + 2(1+\nu) C_1) + w_{1,\xi\theta\theta\theta\theta} (C_1 - 2C_2 + C_3) + \\
& \left. \left. + 2w_{1,\xi\theta\theta} (C_3 - C_2 - (1-\nu) C_1) + w_{1,\xi} C_3 \right] \right\} = 0 \quad (\text{II.30c})
\end{aligned}$$

onde as constantes  $C_i$  são dadas por,

$$C_1 = \frac{2(r_b^2 - r_a^2)}{r_a^2 r_b^2}$$

$$C_2 = \frac{r_b - r_a}{r_a r_b}$$

$$C_3 = \ln \left( \frac{r_b}{r_a} \right) \quad (\text{II.31})$$

$$C_4 = r_b - r_a$$

$$C_5 = \frac{r_b^2 - r_a^2}{2}$$

Do problema variacional também se obtém as seguintes condições de contorno em  $\xi = \pm \lambda/2$ ,

$$v_1 = 0 \quad (\text{II.32a})$$

$$w_1 = 0 \quad (\text{II.32b})$$

$$u_{1,\xi} + v(v_{1,\theta} + w_1) = 0 \quad (\text{II.32c})$$

$$\alpha \left[ w_{1,\xi\xi} + v w_{1,\theta\theta} \right] = 0 \quad (\text{II.32d})$$

que corresponde à condição de apoio simples para o conjunto casca-enrijecedor.

As condições de contorno  $\theta = 0, 2\pi$ , encontradas quando do desenvolvimento do problema variacional, são, pelo Teorema de Green, automaticamente atendidas, já que o sistema é contínuo na direção circunferencial.

## II.4.2 - Resolução do Problema de Bifurcação

O problema de autovalor associado (II.30) é da forma,

$$\left[ A + \phi B \right] \underline{X} = \underline{0} \quad (\text{II.33})$$

o qual tem solução não trivial se, e somente se,

$$\det | A + \phi B | = 0 \quad (\text{II.34})$$

sendo a carga crítica,  $\phi_{cr}$ , o menor dos autovalores e o vetor  $\underline{X}$  o vetor das amplitudes normalizado.

Através de uma inspeção do sistema (II.30) e das condições de contorno (II.32), vê-se que é impossível se obter uma solução na forma fechada para o problema, tendo-se que recorrer a técnicas numéricas.

Sendo as equações diferenciais provenientes de um funcional quadrático, podemos usar indistintamente para a solução do problema o método de Galerkin ou Rayleigh-Ritz. Neste trabalho será usado o método de Rayleigh-Ritz.

### II.4.2.1 - Escolha das Funções Aproximadas para o Modo Crítico

$$\underline{U}_1.$$

#### A - CILINDRO

Expandindo os deslocamentos incrementais em uma série em função da coordenada circunferencial  $\theta$  é satisfeita a periodicidade em  $\theta$  e serão separadas as variáveis  $\theta$  e  $\xi$ . Assim tem-se para a casca,

$$u_c(\xi, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(\xi) \cos n\theta$$

$$v_c(\xi, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(\xi) \sin n\theta \quad (\text{II.35})$$

$$w_c(\xi, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(\xi) \cos n\theta$$

As funções  $u_n(\xi)$ ,  $v_n(\xi)$  e  $w_n(\xi)$  devem ser escolhidas de tal modo que atendam as condições de contorno, as hipóteses iniciais (II.2) e sejam antimétricas em relação ao enrijecedor.

Como não há interação de modos na direção circumferencial, precisa-se considerar apenas um harmônico  $n$  e obtêm-se assim conjunto de funções,

$$u_{c1}(\xi, \theta) = \cos n\theta \sum_{i=1,3,5,\dots}^N A_{1i} \sin qi\xi$$

$$v_{c1}(\xi, \theta) = \sin n\theta \sum_{i=1,3,5,\dots}^N A_{2i} \cos qi\xi \quad (\text{II.36})$$

$$w_{c1}(\xi, \theta) = \cos n\theta \sum_{i=1,3,5,\dots}^N A_{3i} \cos qi\xi$$

#### B - ENRIJECADOR

Substituindo-se (II.36) em (II.4), tem-se para o enrijecedor,

$$u_{a1}(\xi, \theta) = \cos n\theta \left[ A_{1i} + (1 - \zeta) A_{3i} \right] (-1)^{\frac{M_i+3}{2}}$$

$$v_{a1}(\xi, \theta) = 0$$

$$w_{a1}(\xi, \theta) = 0$$

$$i = 1, 3, 5 \dots$$

(II.37)

#### II.4.2.2 - Dedução dos Coeficientes do Sistema $[\bar{A} + \phi B] \underline{\tilde{x}} = 0$ .

O problema de autovalor (II.33) pode ser reescrita na forma

$$[\bar{A}] \underline{\tilde{x}} + \phi [\bar{B}] \underline{\tilde{x}} = 0 \quad (\text{II.38})$$

ou ainda

$$- \frac{1}{\phi} [\bar{A}] \underline{\tilde{x}} = [\bar{B}] \underline{\tilde{x}} \quad (\text{II.39})$$

Substituindo-se (II.36) e (II.37) no funcional (II.29) e empregando o método de Rayleigh-Ritz, obtêm-se os coeficientes das matrizes  $[\bar{A}]$  e  $[\bar{B}]$  do sistema de equações lineares dado por (II.39).

A - Coeficientes da matriz  $[\bar{A}]$

$$A_{i,j} = \delta_{ij} \lambda \left[ q_m q_n + \frac{(1 - \nu)}{2} n^2 \right] + 2 \alpha \eta^3 C_1 \left[ n^4 + 2 (1 - \nu) n^2 \right] \Delta_{mn} \quad (\text{II.40a})$$

$$A_{i,j+1} = \delta_{ij} \lambda \left[ \frac{(1 + \nu)}{2} n q_n \right] \quad (\text{II.40b})$$

$$A_{i,j+2} = \delta_{ij} \lambda \nu q_n + 2 \alpha \eta^3 \left[ n^4 (C_1 - C_2) + n^2 (C_2 + 2(1 - \nu) C_1) \right] q_n \Delta_{mn} \quad (\text{II.40c})$$

$$A_{i+1,j} = \delta_{ij} \lambda \left[ \frac{(1 + \nu)}{2} n q_m \right] \quad (\text{II.40d})$$



$$A_{i+1,j+1} = \delta_{ij} \lambda \left[ n^2 + \frac{(1-\nu)}{2} q_m q_n \right] \quad (\text{II.40e})$$

$$A_{i+1,j+2} = \delta_{ij} \lambda n \quad (\text{II.40f})$$

$$A_{i+2,j} = \lambda \delta_{ij} \nu q_m + 2 \alpha \eta^3 \left[ n^4 (C_1 - C_2) + \right. \\ \left. + n^2 (C_2 + 2(1-\nu)C_1) \right] q_m \Delta_{mn} \quad (\text{II.40g})$$

$$A_{i+2,j+1} = \delta_{ij} \lambda n \quad (\text{II.40h})$$

$$A_{i+2,j+2} = \delta_{ij} \lambda \left[ 1 + \alpha (q_m q_n + n^2)^2 \right] + \\ 2 \alpha \eta^3 q_n q_m \left[ n^4 (C_1 - 2C_2 + C_3) - 2n^2 \right. \\ \left. (C_3 - C_2 - (1-\nu)C_1) + C_3 \right] \quad (\text{II.40i})$$

B - COEFICIENTES NÃO NULOS DA MATRIZ  $[B]$

$$B_{i,j} = 2 \eta (1 + \nu) n^2 C_3 \Delta_{mn} (1 - \beta \nu) \quad (\text{II.41a})$$

$$B_{i,j+2} = 2 \eta (1 + \nu) n^2 (C_3 - C_4) q_n \Delta_{mn} (1 - \beta \nu) \quad (\text{II.41b})$$

$$B_{i+2,j} = 2 \eta (1 + \nu) n^2 (C_3 - C_4) q_m \Delta_{mn} (1 - \beta \nu) \quad (\text{II.41c})$$

$$B_{i+2,j+2} = \delta_{ij} \lambda (n^2 + \beta q_m q_n) (1 - \nu^2) + 2 \eta (1 + \nu) (1 - \beta \nu) \quad (\text{II.41d})$$

$$\left[ n^2 (C_3 - 2C_4 + C_5) + C_5 \right] q_m q_n \Delta_{mn}$$

onde

$$m, n = 1, 2, 3 \dots$$

$$i = 3m - 2$$

$$j = 3n - 2$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases} \quad (\text{II.42})$$

e

$$\Delta_{mn} = NA(-1)^{\left[ \frac{M_m + M_n + 6}{2} \right]} \quad (\text{II.43})$$

## II.5 - ANÁLISE CLÁSSICA DE CASCAS ENRIJECIDAS BIAPOIADAS

A análise clássica de cascas enrijecidas, por anéis espaçados<sup>1</sup> despreza a rigidez torsional do anel, pressupondo que a casca está simplesmente apoiada sobre anéis conforme mostrado na figura (II.5). Neste caso o sistema de equações (II.30) se reduz a,

$$-u_{1,\xi\xi} - \frac{(1-\nu)}{2} u_{1,\theta\theta} - \frac{(1+\nu)}{2} v_{1,\xi\theta} - \nu w_{1,\xi} = 0 \quad (\text{II.44a})$$

$$- \frac{(1+\nu)}{2} u_{1,\xi\theta} - v_{1,\theta\theta} - \frac{(1-\nu)}{2} v_{1,\xi\xi} - w_{1,\theta} = 0 \quad (\text{II.44b})$$

$$\nu u_{1,\xi} + v_{1,\theta} + w_1 + \phi(1-\nu^2)(w_{1,\theta\theta} + \beta w_{1,\xi\xi}) + \alpha \nabla^4 w_1 = 0 \quad (\text{II.44c})$$

tendo como condições de contorno  $\xi = \pm \lambda/2$ ,

$$w_1 = w_{1,\xi\xi} = v_1 = u_{1,\xi} = 0 \quad (\text{II.45})$$

que é também, como se pode verificar<sup>6</sup>, a solução para a casca cilíndrica simplesmente apoiada sob pressão lateral.

Pode-se provar que neste caso não há interação entre os modos longitudinais e a solução das equações (II.44) é dada por,

$$\begin{aligned} u &= A_1 \cos n\theta \sin (m\pi/\lambda)\xi \\ v &= A_2 \sin n\theta \cos (m\pi/\lambda)\xi \\ w &= A_3 \cos n\theta \cos (m\pi/\lambda)\xi \end{aligned} \quad (\text{II.46})$$

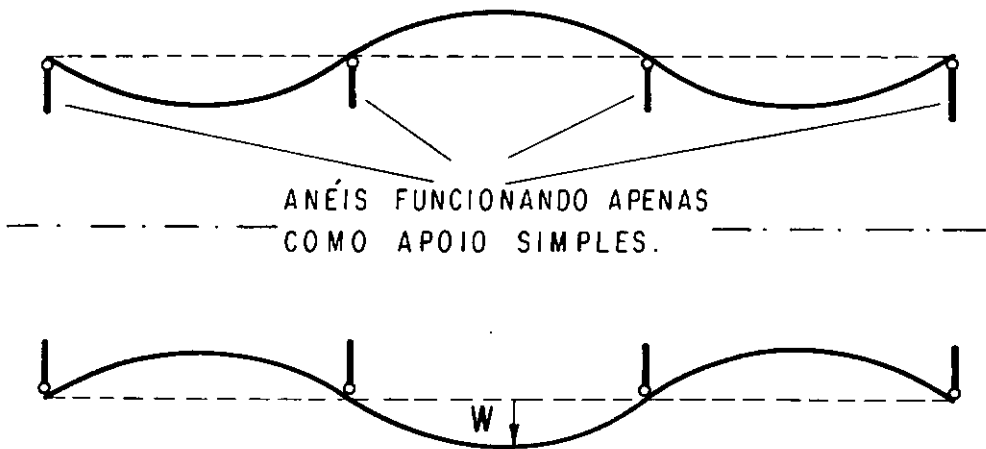


FIG. II-5 — CONFIGURAÇÃO CRÍTICA DA CASCA ENRIJECIDA — ANÉIS INDEFORMADOS.

Estas funções atendem simultaneamente as equações diferenciais de equilíbrio e as condições de contorno e tem-se, assim, uma solução fechada para o problema

Substituindo-se as funções (II.46) no sistema (II.44), obtemos o sistema,

$$\begin{bmatrix} q + \frac{(1-v)}{2} n^2 & \frac{(1+v)}{2} nq & vq \\ \frac{(1+v)}{2} nq & q^2 \frac{(1-v)}{2} + n^2 & n \\ vq & n & 1 + \alpha(n^2 + q^2)^2 - \phi(1-v^2)(n^2 + \beta q^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.47})$$

que é um problema de autovalor da forma,

$$\begin{bmatrix} A + \phi B \end{bmatrix} \underline{X} = 0 \quad (\text{II.48})$$

o qual terá solução não trivial se

$$\det |A + \phi B| = 0 \quad (\text{II.49})$$

O determinante nos dá uma equação do primeiro grau em  $\phi$  e os autovalores são dados por,

$$\phi = \frac{(q^2 + n^2)^2}{(n^2 + \beta q^2)} \cdot \frac{\alpha}{(1-v^2)} + \frac{q^4}{(q^2 + n^2)^2 (n^2 + \beta q^2)} \quad (\text{II.50})$$

Para cada par de valores  $m$  e  $n$  tem-se um autovalor  $\phi$ , sendo que o menor deles, para cada geometria, corresponde a  $m = 1$ , isto é, modo de bifurcação da casca tem meia onda longitudinal. Fixando-se, então, um determinado valor de  $\lambda$  e  $R/H_c$ , o número de ondas circunferenciais,  $n$  que corresponde ao menor autovalor ( $\phi_{cr}$ ) é obtido por tentativa.

Sendo a equação (II.50) obtida pela Teoria de Donnel para cascas abatidas, para não se incorrer em resultados errôneos, como sugere Hutchinson<sup>3</sup>, devemos restringir a nossa análise a cascas para as quais  $n \geq 5^3$ .

Introduzindo a notação

$$\bar{p} = \frac{12(1 - \nu^2) L^2}{\pi^2 H_c^2} \phi ; \quad \bar{n} = \frac{n\lambda}{\pi} \quad \text{e} \quad Z = \frac{L^2}{RH_c} (1 - \nu^2)^{1/2}$$

Podemos reescrever a equação (II.50) em uma forma mais simples,

$$\bar{p} = \frac{(1 + \bar{n}^2)^2}{(\bar{n}^2 + \beta)} + \frac{12 Z^2}{(\bar{n}^2 + \beta) (1 + \bar{n}^2)^2 \pi^4} \quad (\text{II.51})$$

onde o parâmetro de carga adimensional  $\bar{p}$  é independente de  $R/H_c$ .

Esta equação fornece a curva clássica relacionando  $\bar{p}$  versus  $Z$  deduzida por Batdorf<sup>15</sup>. Esta expressão nos dá também a carga crítica para a casca enrijecida por anéis conforme deduziu Budiansky e Amazigo<sup>1</sup>.

Normalizando as amplitudes em função de  $A_3$ , tem-se para os modos críticos.

$$u = - \frac{q(n^2 - \nu q^2)}{(n^2 + q^2)^2} \cos n\theta \quad \text{sen } q\xi$$

$$v = \frac{q(\nu + 2) + n^2}{(n^2 + q^2)^2} \text{sen } n\theta \quad \cos q\xi \quad (\text{II.52})$$

$$w = \cos n\theta \quad \cos q\xi$$

Os resultados obtidos da expressão (II.51) não são válidos para pequenos valores de  $R/H_c$  nem para grandes valores de  $Z$  como mostra Batdorf<sup>15</sup>, já que estamos usando a teoria de cascas abatidas. Por outro lado para pequenos valores de  $Z$  ( $Z < 10$ ) os efeitos das distorções junto aos apoios e enrijecido

res não mais podem ser negligenciados como evidencia Hutchinson<sup>3</sup> e a solução de membrana (II.17) já não é mais válida. Os resultados obtidos pelo presente estudo são válidos então para  $10 < Z < 10^4$ , intervalo este que engloba a quase totalidade das geometrias práticas.

## CAPÍTULO III

### CARGAS E MODOS DE BIFURCAÇÃO: RESULTADOS NUMÉRICOS

## CAPÍTULO III

## CARGAS E MODOS DE BIFURCAÇÃO:

## RESULTADOS NUMÉRICOS

## III.1 - IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DO CÁLCULO

O sistema de equações (II.39), proveniente do problema de autovalor, cujos coeficientes são dados pelas expressões (II.40) do capítulo anterior, foi resolvido numericamente com o auxílio do computador Burroughs 6700 do Núcleo de Computação Eletrônica da UFRJ, utilizando a linguagem de programação FORTRAN IV.

A busca de soluções para problemas de estabilidade elástica conduz, geralmente, a sistemas de equações bastante mal condicionados, devendo ser usada precisão dupla para garantir a convergência. Para superar problemas de convergência o sistema (II.39) exigiu, não só o emprego de precisão dupla, mas também um rearranjo das equações de tal forma que eliminasse a grande instabilidade numérica ocasionada por termos associados a modos mais altos na sequência modal para deslocamentos.

A solução numérica do problema de autovalor é obtida através do método de interação inversa, cujo algoritmo é apresentado na referência<sup>14</sup>, usando a técnica de Doolittle para fatorização e o método de Gauss para resolução do sistema.



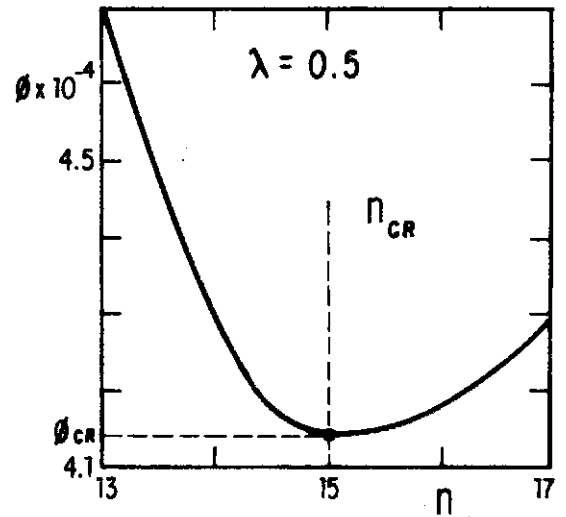
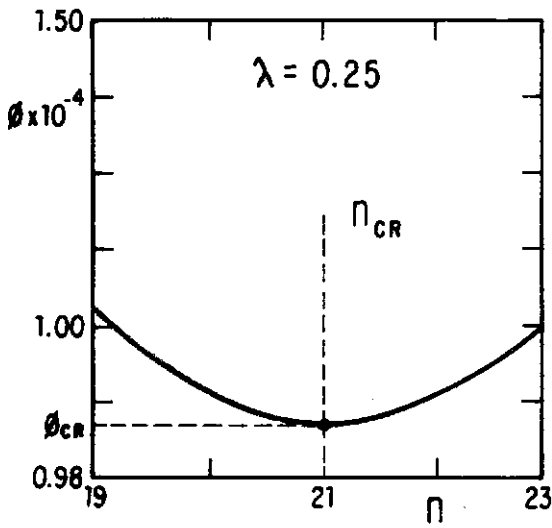
### III.2 - ANÁLISE DOS RESULTADOS NUMÉRICOS REFERENTES À CASCA SIMPLESMENTE APOIADA.

Os resultados numéricos apresentados a seguir foram obtidos a partir das expressões deduzidas no item (II.5) do capítulo anterior, expressões estas obtidas do sistema (II.44) quando se considera a casca simplesmente apoiada sem enrijecedores ou com enrijecedores rígidos funcionando apenas como apoios simples.

Fixando uma forma modal descrita por um par de valores  $m$  e  $n$ , bem como os parâmetros  $\alpha$  e  $\lambda$  referentes à geometria da casca, obtém-se um autovalor  $\phi$  através da equação (II.50). O menor autovalor,  $\phi_{cr}$ , para cada geometria corresponde a  $m = 1$ , isto é, o modo de bifurcação tem meia onda longitudinal e um certo número de ondas circunferenciais obtido por tentativa, como se vê na figura (III.1). Esta figura mostra a variação de  $\phi$  com o número de ondas circunferenciais,  $n$ , para determinados valores de  $L/R$  e  $R/H_c$ .

A figura (III.2) apresenta a variação de  $\phi_{cr}$ , associado ao modo crítico  $(m,n) \equiv (1, n_{cr})$  com a razão  $\lambda = L/R$ . Convém relembrar que se assume  $\phi$  como uma função contínua de  $n$ . Com estas curvas verifica-se que, para cascas curtas,  $\phi_{cr}$  cresce rapidamente quando o parâmetro  $\lambda$  decresce e que, para um mesmo valor de  $\lambda$ ,  $\phi_{cr}$  cresce a medida que  $R/H_c$  decresce.

Uma melhor representação da variação da carga crítica com a geometria da casca pode ser obtida a partir da equação (II.51) que relaciona o parâmetro de carga adimensional  $\bar{p}$  com o parâmetro de Batdorf,  $Z$ . Esta equação fornece uma única curva qualquer que seja o valor de  $R/H_c$ . Esta curva é mostrada na figu



$$R/Hc = 300$$

$$\bar{\nu} = 0.3$$

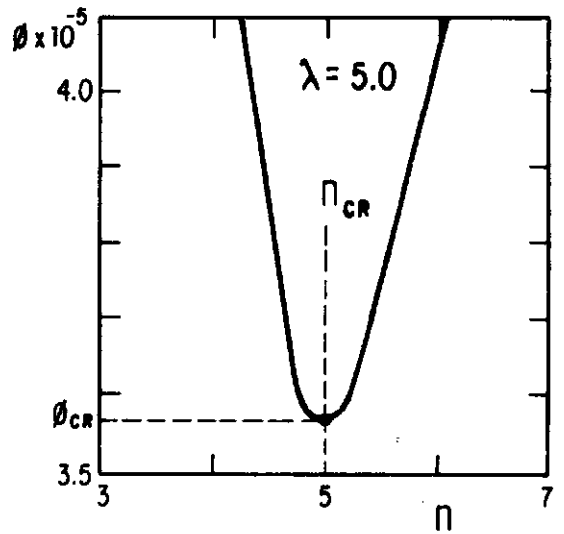
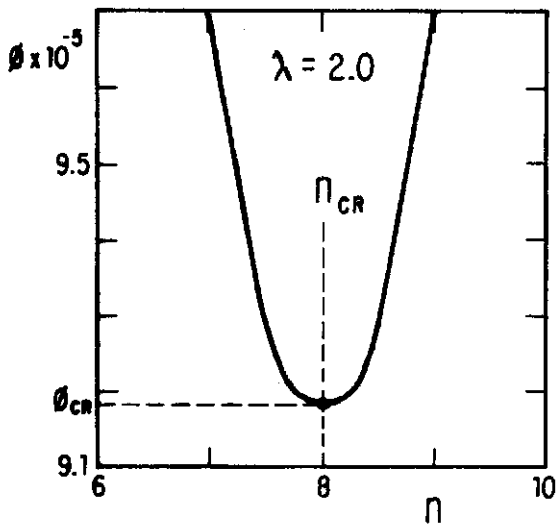


FIG. III.1 — DETERMINAÇÃO DO NÚMERO DE ONDAS CIRCUNFERENCIAIS CRÍTICO,  $n_{CR}$  — CASCA ISOTRÓPICA SOB PRESSÃO LATERAL.

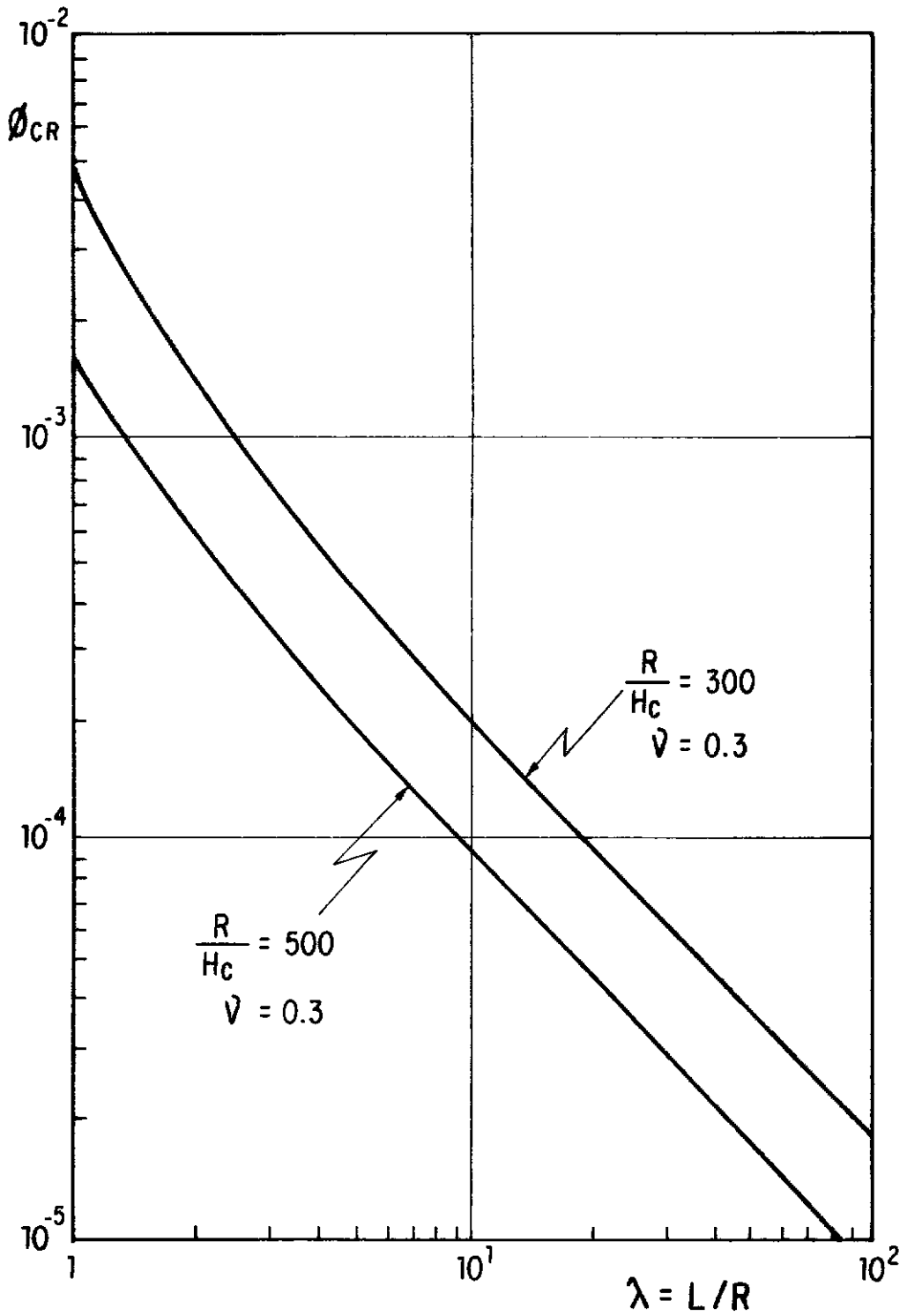


FIG. III.2 — CARGA CRÍTICA DE CASCA ISOTRÓPICA SOB PRESSÃO LATERAL.

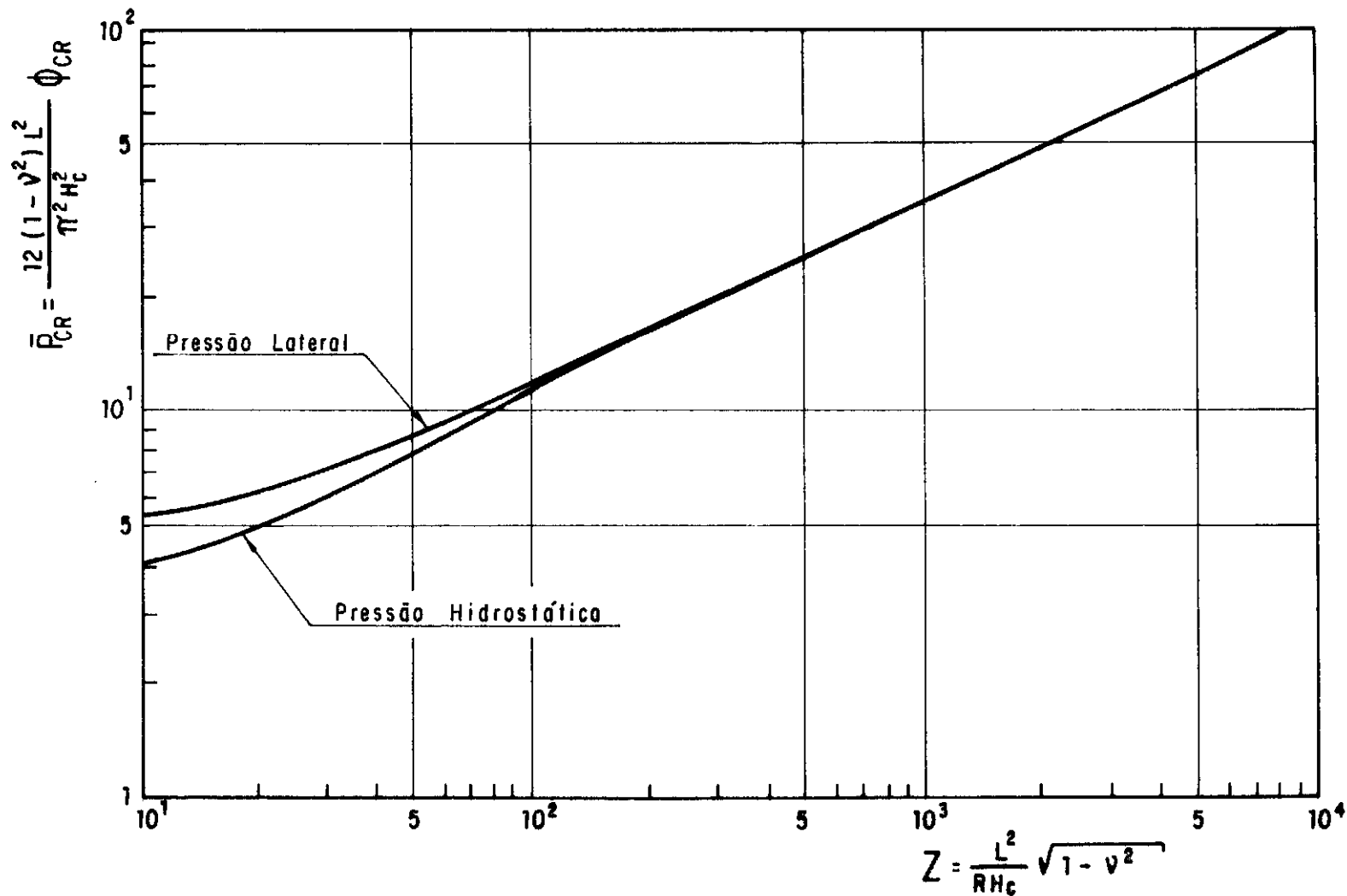


FIG. III.3—CARGA CRÍTICA CLÁSSICA DA CASCA CILÍNDRICA ISOTRÓPICA SOB PRESSÃO EXTERNA.

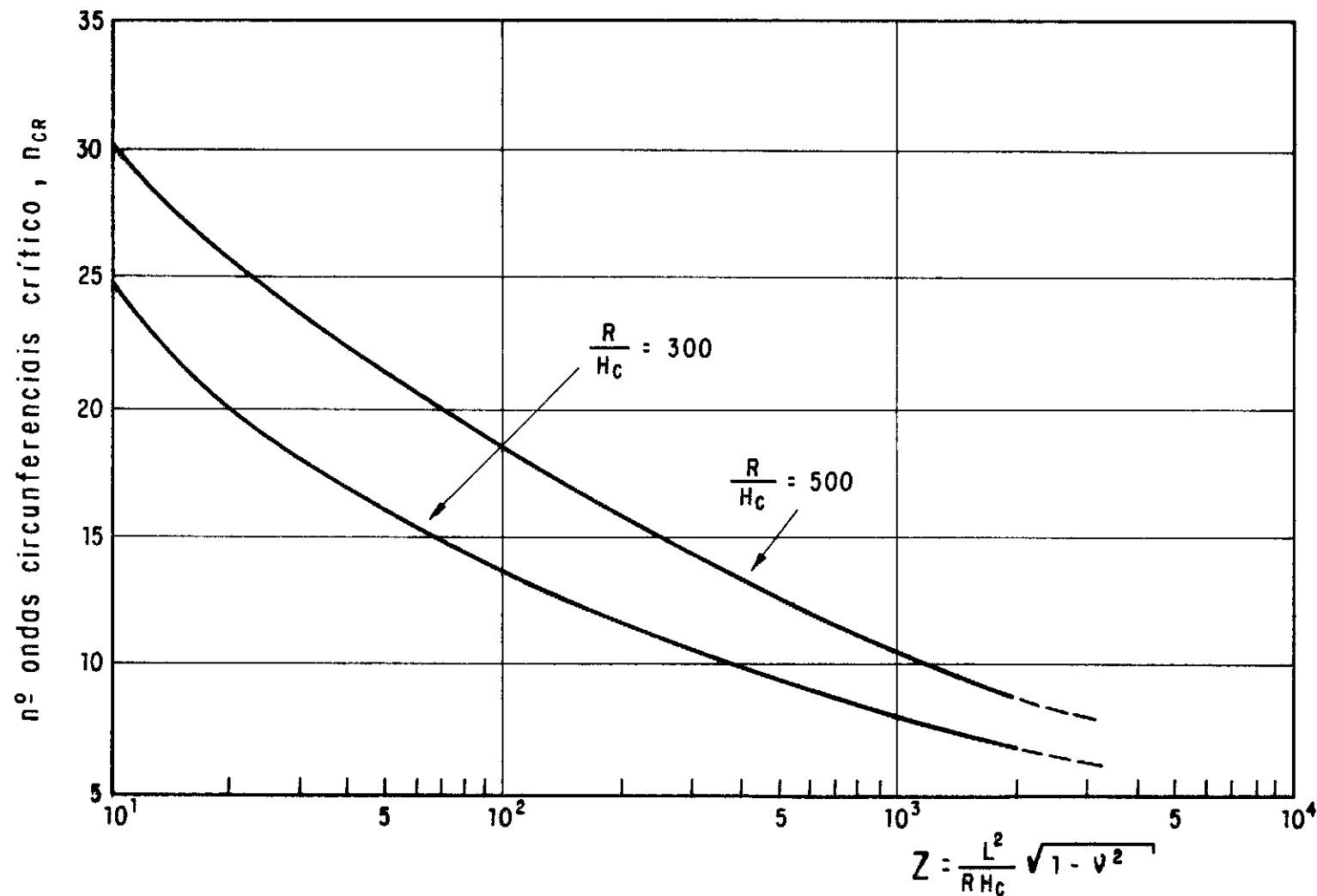


FIG. III. 4 — VARIAÇÃO DO NÚMERO DE ONDAS CIRCUNFERENCIAIS CRÍTICO,  $n_{CR}$ , COM O PARÂMETRO GEOMÉTRICO,  $Z$ —CASCA ISOTRÓPICA SOB PRESSÃO LATERAL.

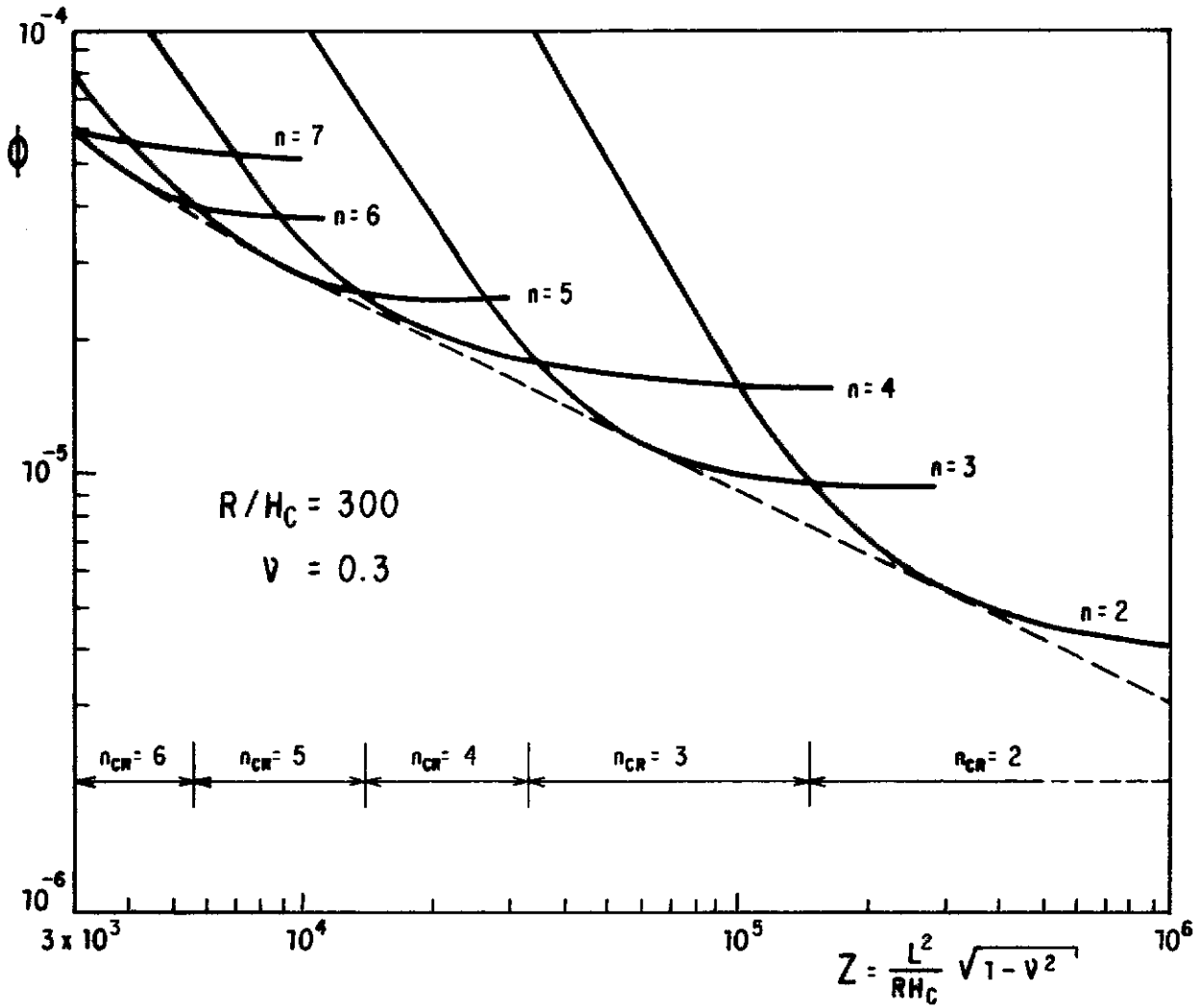


FIG. III.5 — VARIAÇÃO DE  $n_{CR}$  PARA VALORES GRANDES DE  $Z$  — CASCA ISOTRÓPICA SOB PRESSÃO LATERAL.

ra (III.3) a qual coincide com a curva deduzida por Batdorf<sup>15</sup> para cascas simplesmente apoiadas e também com os resultados obtidos por Budiansky e Amazigo<sup>1</sup> para cascas com enrijecedores espaçados funcionando apenas como apoios simples.

A variação do número crítico de ondas circunferenciais,  $n_{cr}$ , em função do parâmetro  $Z$  é apresentada na figura (III.4). Verifica-se que  $n_{cr}$  cresce rapidamente a medida  $Z$  diminui e que, para um mesmo valor de  $Z$ ,  $n_{cr}$  cresce a medida que cresce a razão  $R/H_c$ . Neste gráfico se constata a veracidade da hipótese adotada sobre a continuidade da variável  $n$  no intervalo estudado. A quebra desta hipótese para valores pequenos de  $n$  é ilustrada pela figura (III.5). Vê-se nesta figura que, para valores de  $n_{cr} < 5$ , a variável  $n$  não mais pode ser considerada contínua, não devendo, portanto, ser usada a equação (II.51) para o cálculo de  $\phi_{cr}$ .

Estes resultados servirão como parâmetro de referência para posterior comparação com os resultados obtidos a seguir para cilindros enrijecidos com anéis esbeltos.

### III.3 - ANÁLISE DOS RESULTADOS NUMÉRICOS REFERENTES À CASCA ENRIJECIDA

A carga crítica local,  $\phi_{cr}$ , para uma casca enrijecida com geometria fixada, é obtida através da descrição do campo de deslocamentos por uma série finita de modos longitudinais com números ímpares de semi-ondas e um certo número de ondas circunferenciais. Como se pode verificar através da análise do sistema (II.39), a presença do enrijecedor provoca interação entre os modos longitudinais, sendo assim necessário descrever o campo de

deslocamentos por uma série. O número de termos (modos longitudinais) é então tomado de forma a garantir a convergência numérica de  $\phi_{cr}$  e o número de ondas circunferenciais crítico,  $n_{cr}$ , é obtido por tentativa como pode ser ilustrado com o auxílio da figura (III.6). O processo numérico utilizado garantiu, com o aumento do número de modos longitudinais, a convergência de  $\phi$  como mostram as figuras (III.7a) e (III.7b). Nestas figuras se pode verificar a convergência de  $\phi$  para diferentes valores de  $Z$  e  $R/H_c$ . As cargas críticas foram obtidas sempre com um erro menor ou igual a meio por cento.

Na figura (III.7a) são apresentadas quatro curvas de convergência para  $R/H_c = 300$  e diferentes valores de  $Z$  cobrindo a faixa estudada. Vê-se que o número de modos necessário à convergência aumenta a medida que se aumenta o parâmetro  $Z$  até atingir um máximo na região de  $Z \sim 10^3$ . A figura (III.7b) apresenta a convergência para cascas com  $R/H_c = 500$ ; nesta figura se verifica um comportamento semelhante ao da figura (III.7a). Pode-se verificar, através destas curvas, que, para cascas longas ( $Z$  grande), modos longitudinais com ondas curtas (grande número de ondas) têm efeito significativo sobre o valor de  $\phi_{cr}$ .

A variação do parâmetro de carga crítica,  $\phi_{cr}$ , em função de  $L/R$  e  $R/H_c$ , para geometria de enrijecedores fixada (descrita pelos parâmetros adimensionais  $\eta$ ,  $\epsilon$  e  $\gamma$ ), é apresentada na figura (III.8), sendo esta variação semelhante àquela para cascas biapoiadas. Verifica-se que, para um mesmo valor de  $R/H_c$ , as curvas para cascas com e sem enrijecedores praticamente coincidem para valores grandes de  $Z$  e a diferença cresce a medida que  $Z$  decresce, sendo a carga crítica da casca enrijecida superior a



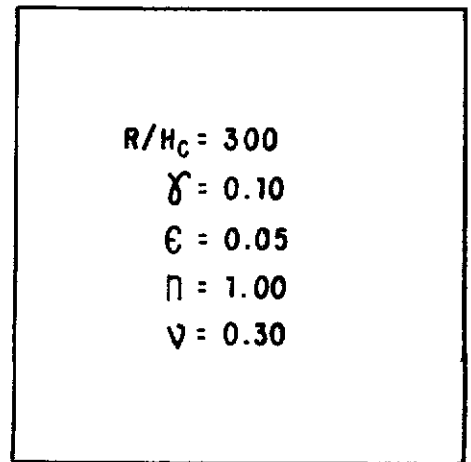
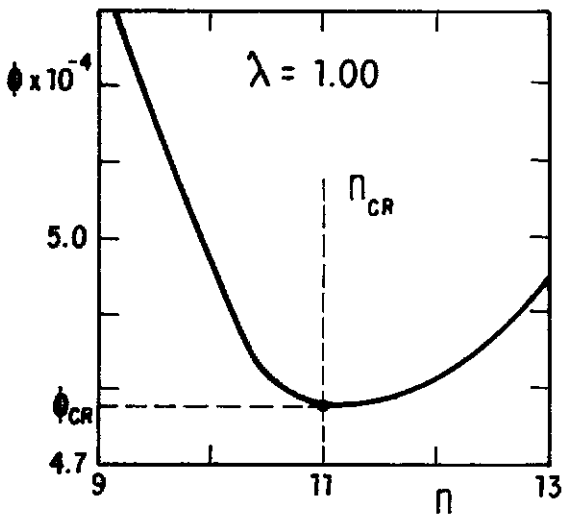
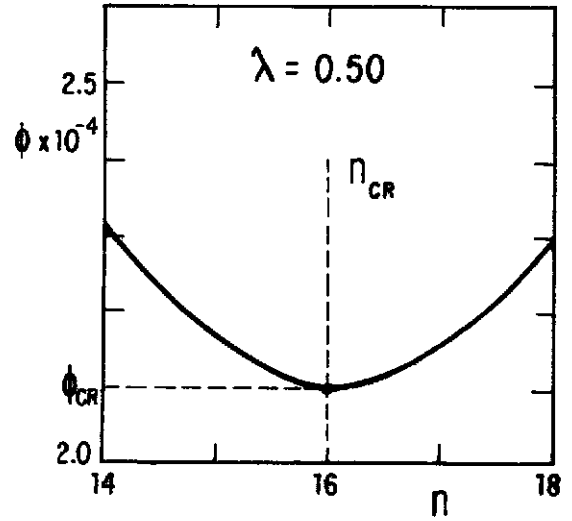
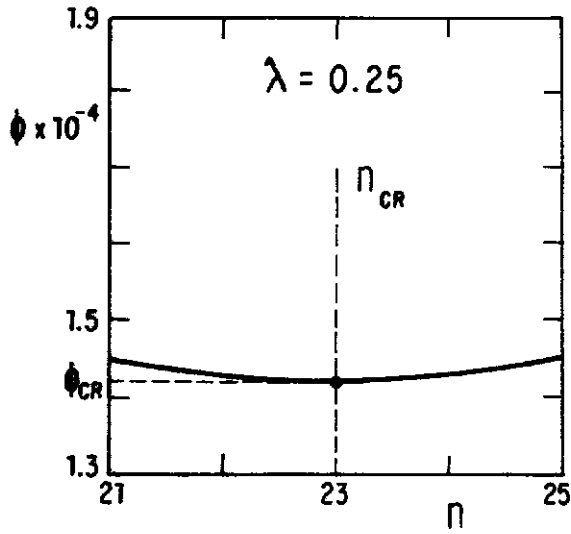


FIG. III.6 – DETERMINAÇÃO DO NÚMERO DE ONDAS CIRCUNFERENCIAIS CRÍTICO,  $n_{CR}$  – CASCA ENRIJECIDA SOB PRESSÃO LATERAL.

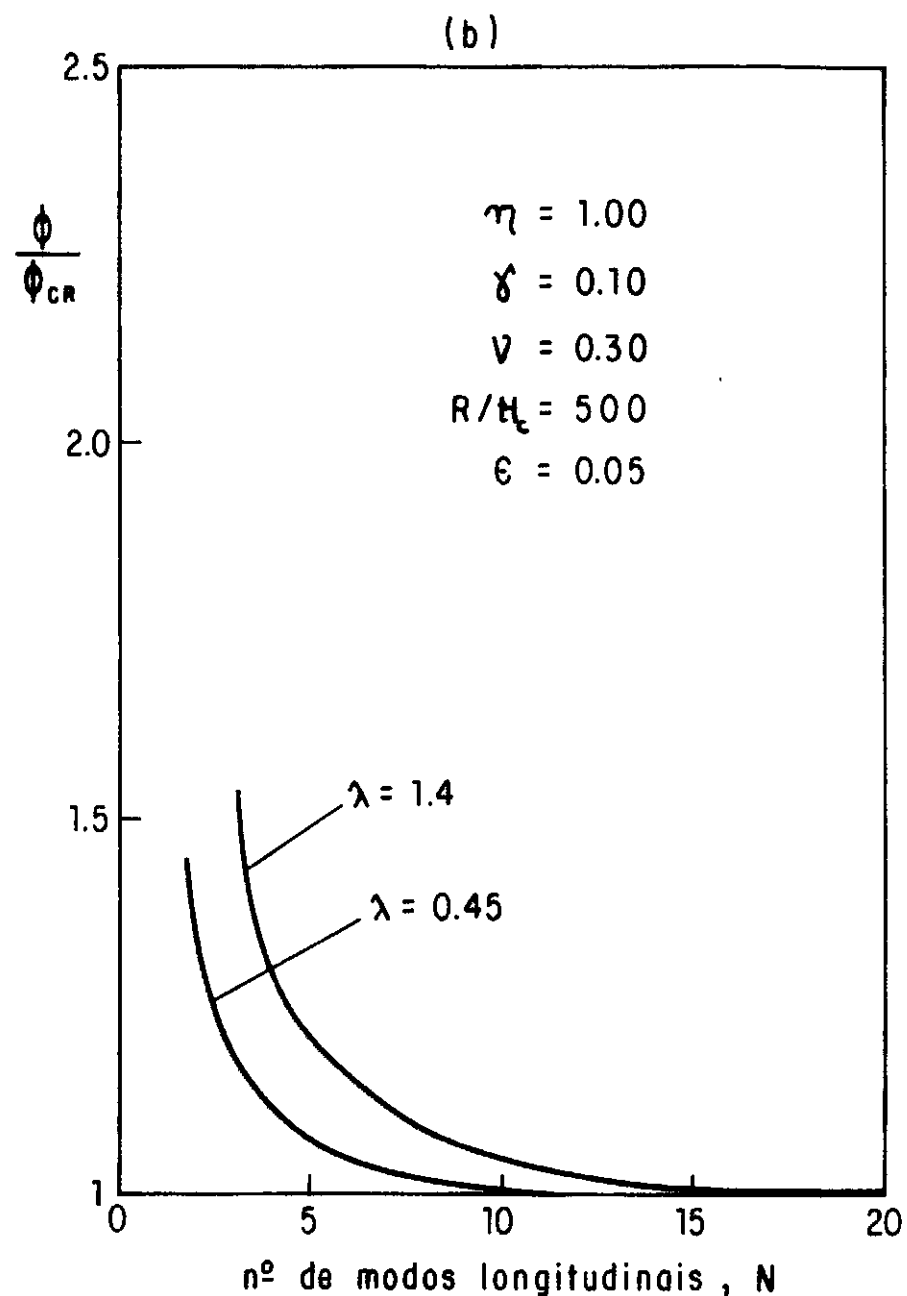
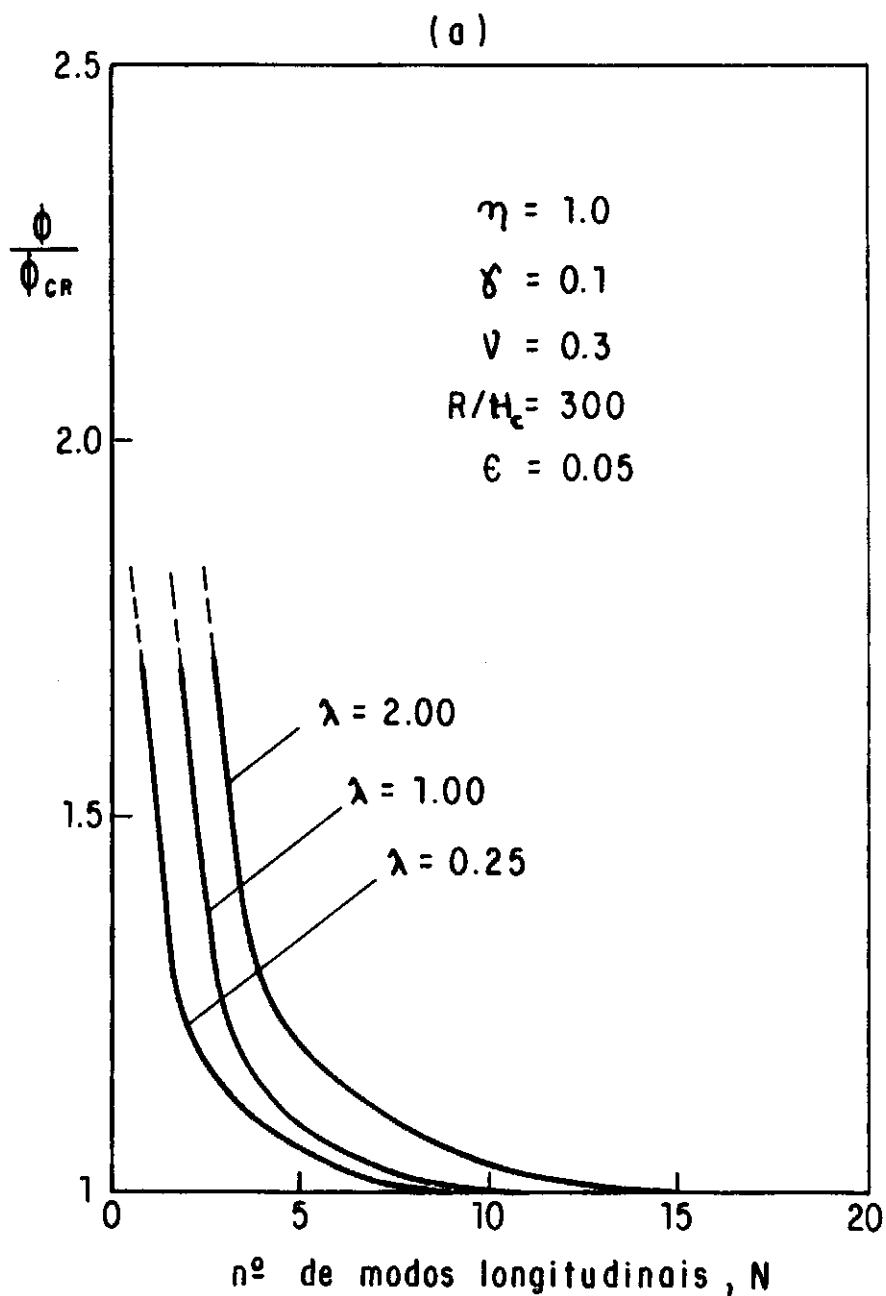


FIG. III. 7 — CONVERGÊNCIA DA CARGA CRÍTICA DA CASCA ENRIJECIDA COM O NÚMERO DE MODOS LONGITUDINAIS, N.

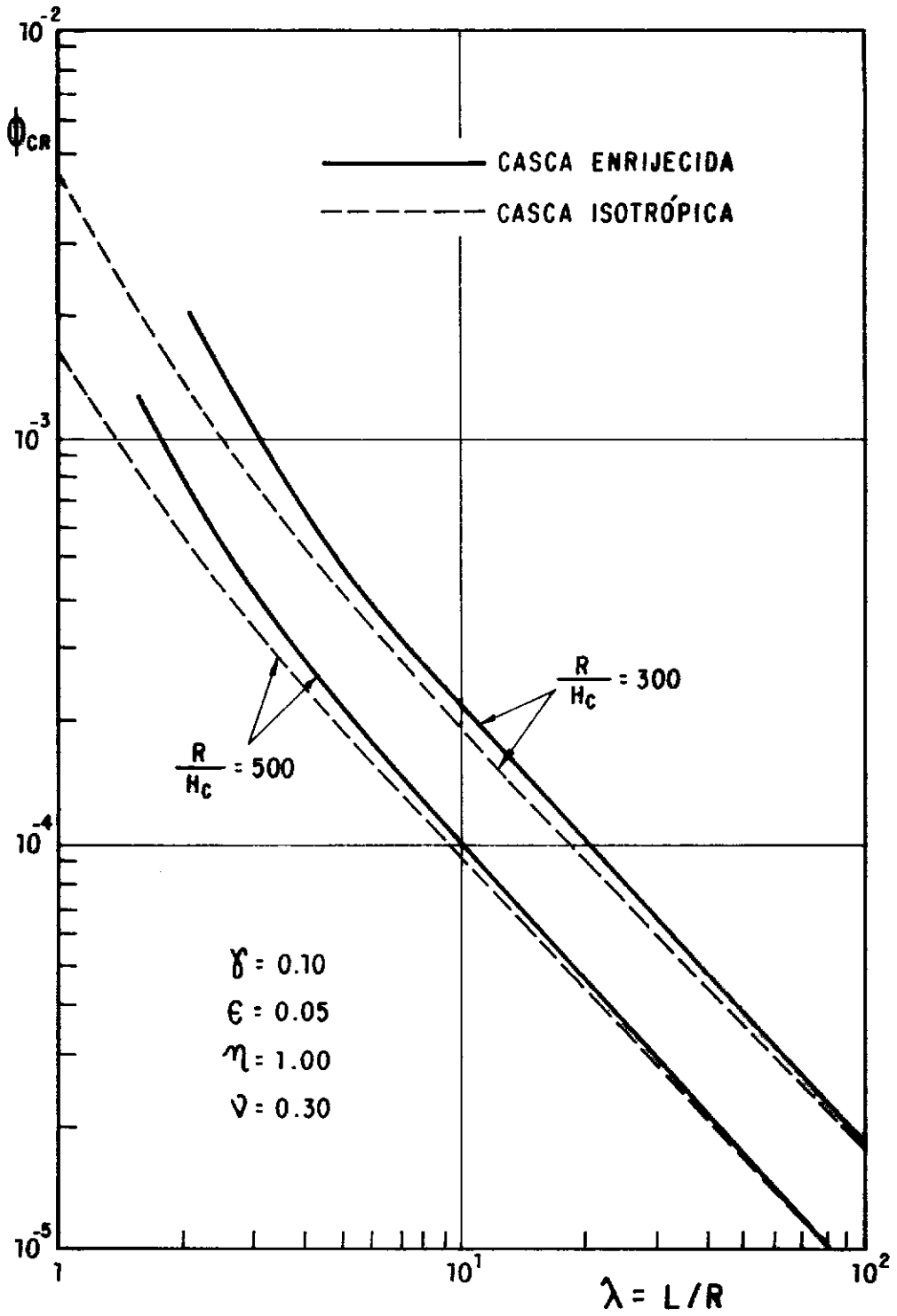


FIG. III.8 — INFLUÊNCIA DOS PARÂMETROS GEOMÉTRICOS DA CASCA,  $\lambda$  e  $R/H_c$ , NA CARGA CRÍTICA DA CASCA ENRIJECIDA — PRESSÃO LATERAL.

da casca simplesmente apoiada. Esta diferença é praticamente nula para  $Z = 10.000$ , atingindo aproximadamente 50% para  $Z = 10$ .

Na figura (III.9) se apresenta a variação do parâmetro de carga crítica,  $\bar{P}_{cr}$ , em função do parâmetro  $Z$ . Neste gráfico vê-se com maior clareza o aumento progressivo da carga crítica da casca enrijecida em relação à casca sem enrijecedores, a medida que o valor de  $Z$  diminui.

A figura (III.10) mostra a variação do número de ondas circunferenciais relativo a carga crítica,  $n_{cr}$ , em função do parâmetro  $Z$ . Verifica-se neste gráfico que o número de ondas circunferenciais referente à carga crítica para a casca com e sem enrijecedores coincide para valores grandes de  $Z$  e cresce rapidamente a medida que  $Z$  decresce, tornando-se o número de ondas circunferenciais relativo ao modo crítico da casca com enrijecedor superior ao da casca simplesmente apoiada.

Comparando-se as figuras (III.9) e (III.10) nota-se que o aumento da carga crítica da casca enrijecida em relação à simplesmente apoiada corresponde a um aumento progressivo do número de ondas circunferenciais,  $n_{cr}$ . Este comportamento é devido a existência dos enrijecedores os quais conferem à casca condições de apoio elástico.

Constata-se que cascas relativamente curtas ( $Z < 10^3$ ) as condições de contorno são obviamente importantes. Como a teoria empregada considera o anel como uma espécie de apoio elástico, os resultados da casca enrijecida devem estar localizados entre os resultados da casca simplesmente apoiada e os resultados da casca com as extremidades engastadas. Para cascas longas, os apoios praticamente não interferem na carga crítica e, indepen-

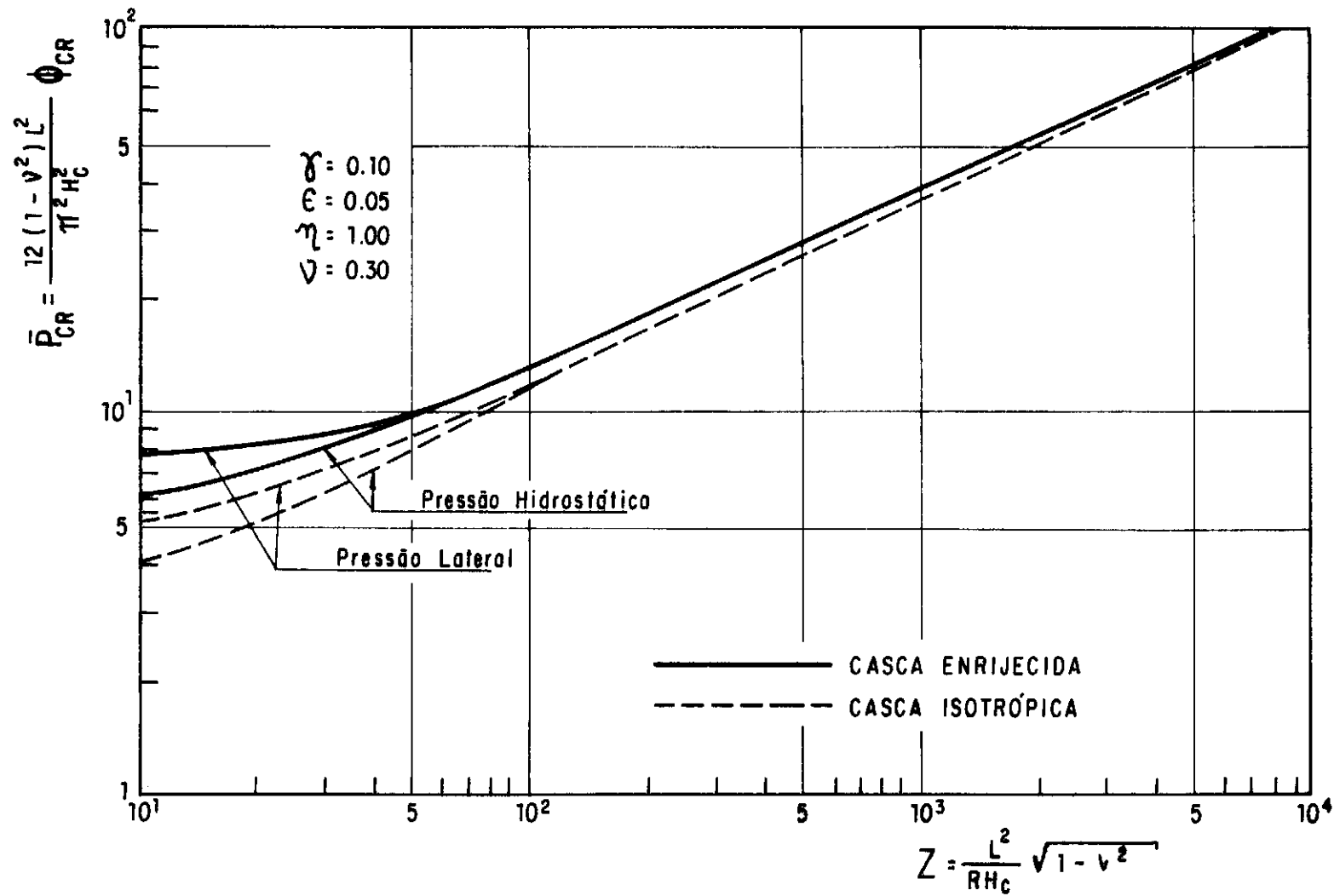


FIG. III.9 — INFLUÊNCIA DO PARÂMETRO DE BATDORF,  $Z$ , NA CARGA CRÍTICA,  $\bar{P}_{CR}$ , DA CASCA ENRIJECIDA.

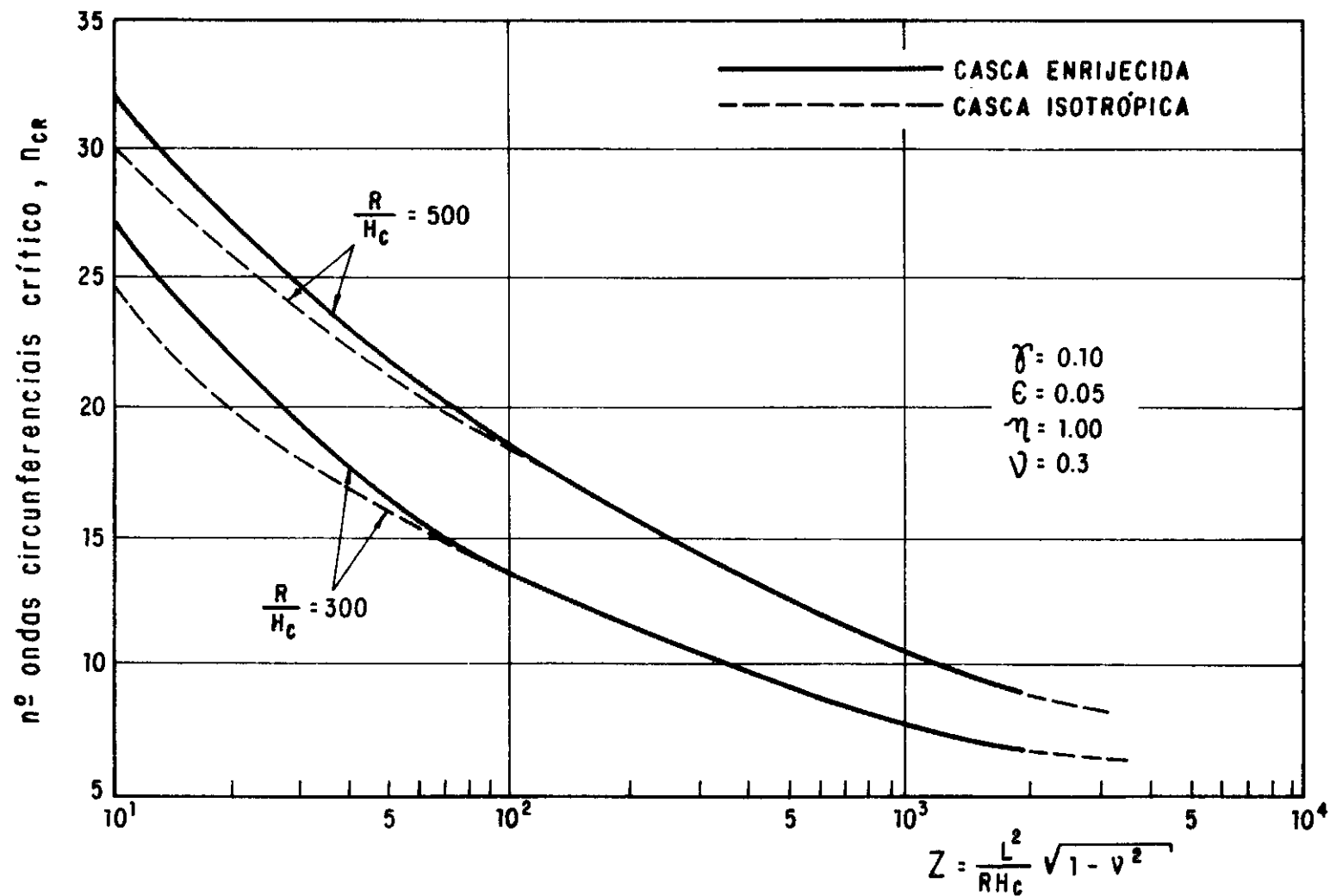


FIG. III.10 — VARIAÇÃO DO NÚMERO DE ONDAS CIRCUNFERENCIAIS CRÍTICO,  $n_{CR}$ , COM O PARÂMETRO GEOMÉTRICO,  $Z$  - PRESSÃO LATERAL.

dentemente do tipo de apoio, tem-se uma única solução para o problema da bifurcação. Este comportamento pode ser constatado na figura (III.11) onde se comparam os resultados relatados na referência<sup>13</sup> para cascas engastadas e simplesmente apoiadas sob pressão lateral. Os resultados concordam com as conclusões de Sobel<sup>27</sup> que mostra que qualquer restrição à rotação nos apoios tem efeito significativo apenas para cascas relativamente curtas.

Foi verificado que variando as características geométricas do enrijecedor dentro dos limites práticos as curvas (III.8) e (III.9) obtidas para  $\gamma = 0.1$ ,  $\epsilon = 0.05$  e  $\eta = 1$  permaneciam praticamente inalteradas.

Procurou-se, pois, analisar a influência da profundidade e espessura do enrijecedor sobre a carga crítica da casca. Os resultados obtidos são apresentados nas figuras (III.12) e (III.13).

A figura (III.12) mostra a variação de  $\phi_{cr}$  (fixados os valores de  $R/H_c$ ,  $L/R$ ,  $\eta$  e  $\epsilon$ ) em função da profundidade do enrijecedor,  $\gamma$ . Se constata a existência de um aumento súbito da carga crítica para valores de  $\gamma$  ainda bastante pequenos, atingindo rapidamente um limite superior.

A figura (III.13) mostra a variação de  $\phi_{cr}$  com a espessura do enrijecedor  $\eta$ , tendo todos os outros parâmetros geométricos fixos. Neste gráfico verifica-se que, de forma análoga à figura (III.12), o aumento da espessura do enrijecedor além de um certo limite não corresponde a um aumento efetivo da carga crítica.

Estes últimos resultados indicam que o valor ótimo para a rigidez à torção e/ou à flexão é bastante pequeno e a uti-

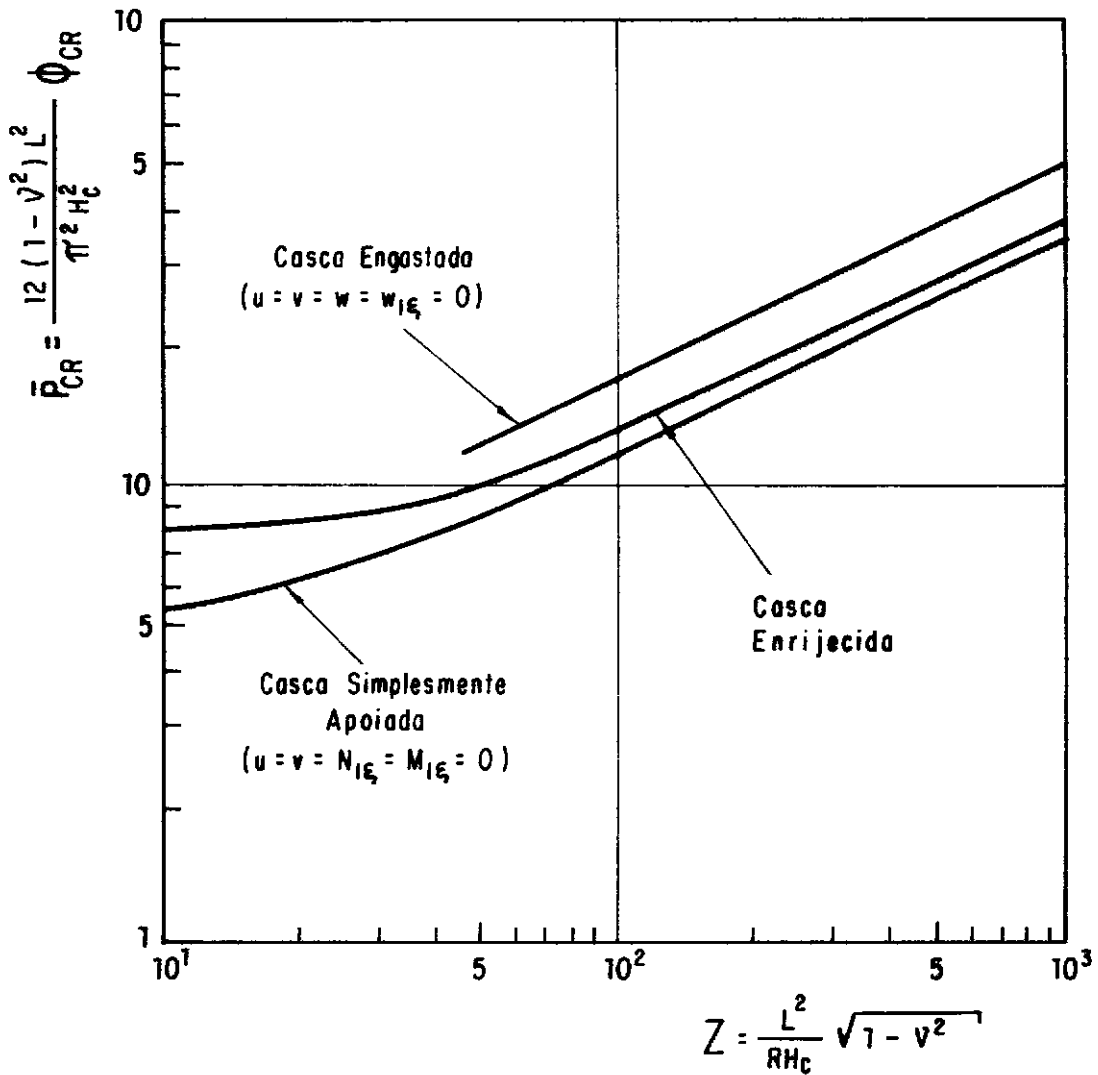


FIG. III.11 — INFLUÊNCIA DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO DA CASCA NA CARGA CRÍTICA.



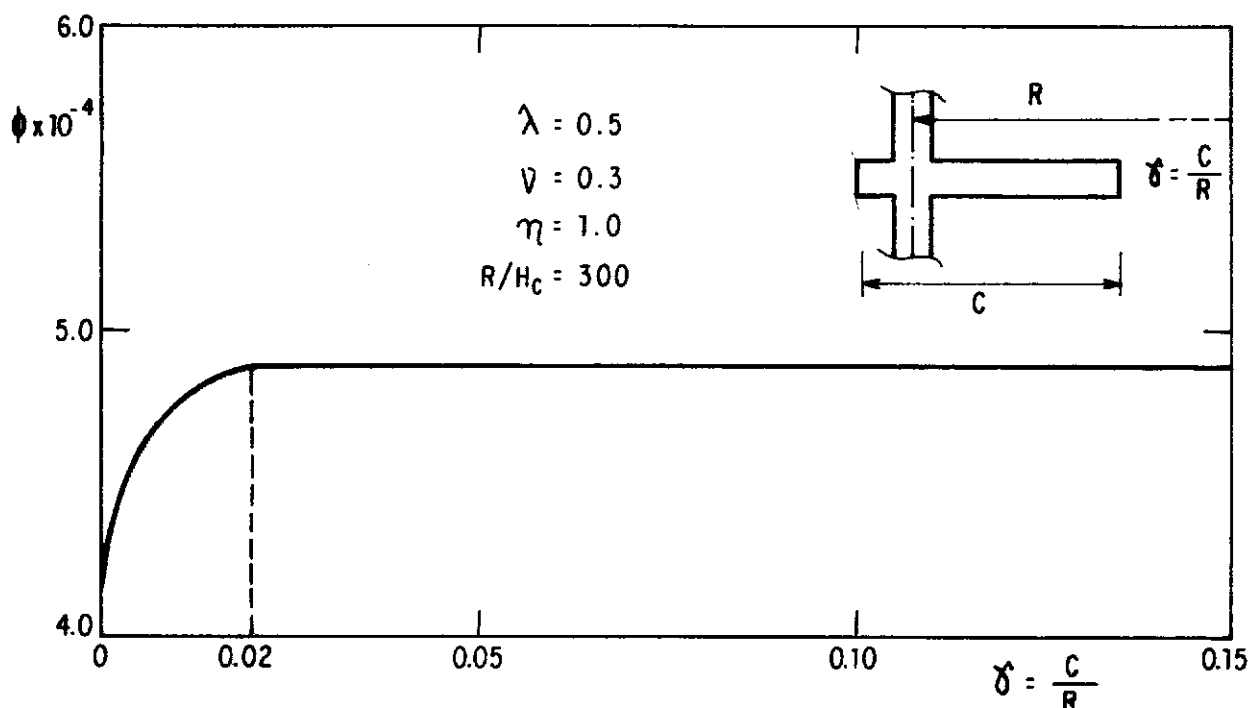


FIG. III.12 — INFLUÊNCIA DA PROFUNDIDADE DO ENRIJECEDOR NA CARGA CRÍTICA DA CASCA.

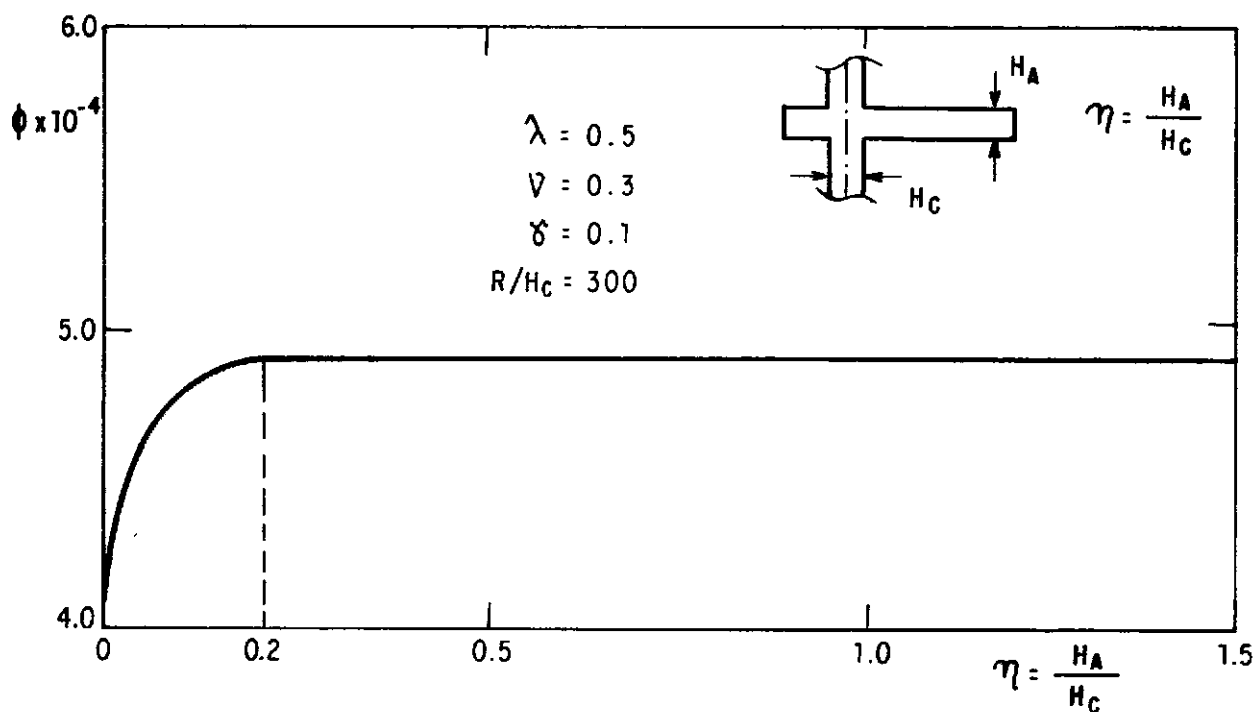


FIG. III.13 — INFLUÊNCIA DA ESPESSURA DO ENRIJECEDOR NA CARGA CRÍTICA DA CASCA.

lização de enrijecedores com características de rigidez além desses limites superiores seria ineficaz quanto ao aumento da carga crítica. Um comportamento semelhante já havia sido constatado por Singer e Haftka<sup>28</sup> e MacNeal<sup>24</sup> que chamaram este limite superior de "cutoff point", sendo que estes trabalhos analisam, a estabilidade global de cascas com anéis não esbeltos.

Vê-se que o aumento além de um certo limite da profundidade e espessura dos anéis para o caso de enrijecedores espaçados não tem praticamente nenhum efeito sobre a carga crítica local. Estes resultados nos levam a sugerir o emprego de enrijecedores bastante esbeltos, sendo suas características geométricas apenas suficientes para resistir à compressão radial provocada pela resistência ao deslocamento nesta direção.

## CAPÍTULO IV

### ANÁLISE ASSINTÓTICA DO CAMINHO PÓS-CRÍTICO

## CAPÍTULO IV

## ANÁLISE ASSINTÓTICA DO CAMINHO PÓS-CRÍTICO

A versão de Seide<sup>6</sup> para a formulação da teoria geral da estabilidade elástica de Koiter<sup>4</sup> é utilizada na presente análise e somente os resultados essenciais da teoria pertinentes ao problema tratado serão aqui utilizados.

## IV.1 - ANÁLISE DA ESTABILIDADE DE ESTADOS PÓS-CRÍTICOS INICIAIS

A estabilidade de um estado crítico de equilíbrio,  $\left[ \underline{U}_0(\phi_{cr}), \phi_{cr} \right]$ , ocorrendo ao longo do caminho fundamental, pode ser estudada através do comportamento pós-crítico inicial, isto é, na vizinhança desse estado crítico. Para isto o caminho pós-crítico pode ser descrito por expansões para o campo de deslocamento,  $\underline{U}$ , e o parâmetro de carga,  $\phi$ , em termos de um parâmetro de perturbação  $\hat{\epsilon}$ , onde  $\hat{\epsilon}$  é tomado como uma variável independente.

A expansão assintótica completa para os deslocamentos é dada na forma

$$\underline{U} = \underline{U}_0 + \underline{U}_1 \hat{\epsilon} + \underline{U}_2 \hat{\epsilon}^2 + \dots \quad (\text{IV.1})$$

onde  $\underline{U}_0$  é associado ao estado fundamental,  $\underline{U}_1$  é o vetor dos modos críticos  $(u_1, v_1, w_1)$  normalizados e  $\underline{U}_2$  é um campo de deslocamentos incremental ortogonal a  $\underline{U}_1$ .

O parâmetro de carga  $\phi$  é descrito pela expansão,

$$\phi = \phi_{cr} + \phi_1 \hat{\epsilon} + \phi_2 \hat{\epsilon}^2 + \dots \quad (\text{IV.2})$$

O coeficiente  $\phi_1$  na expansão (IV.2) é dado por

$$\phi_1 = - \frac{3}{2} \frac{\Phi_3(\underline{U}_1, \phi_{cr})}{\frac{d}{d\phi} \Phi_2(\underline{U}_1, \phi_{cr})} \quad (IV.3)$$

No caso de estruturas axissimétricas, devido à periodicidade do modo crítico na direção circunferencial, tem-se que

$$\Phi_3(\underline{U}_1, \phi_{cr}) = 0 \quad (IV.4)$$

resultado este que na expressão (IV.3) acarreta

$$\phi_1 = 0 \quad (IV.5)$$

se concluindo daí que o problema estudado apresenta bifurcação simétrica.

No caso aqui tratado a bifurcação é simétrica e o terceiro termo da expansão (IV.2) é dado por

$$\phi_2 = \frac{-2 \left[ \Phi_4(\underline{U}_1, \phi_{cr}) - \Phi_2(\underline{U}_2, \phi_{cr}) \right]}{\frac{d}{d\phi} \Phi_2(\underline{U}_1, \phi_{cr})} \quad (IV.6)$$

Para o cálculo do  $\phi_2$  necessita-se de  $\underline{U}_2$  o qual é obtido (quando  $\phi_1 = 0$ ) da equação

$$\Phi_2(\underline{U}_2, \phi_{cr}) + \Phi_{21}(\underline{U}_1, \underline{U}_2, \phi_{cr}) = 0 \quad (IV.7)$$

Os sub-índices em  $\Phi_{21}$  indicam que este funcional é do segundo grau em  $\underline{U}_1$  e do primeiro grau em  $\underline{U}_2$ .

Como o problema apresenta bifurcação simétrica e a tangente ao caminho pós-crítico em  $\phi = \phi_{cr}$  é normal ao caminho fundamental, a estabilidade do estado crítico é definida pelo sinal de  $\phi_2$ , o qual está relacionado (veja a expressão (IV.2)) à

curvatura do caminho pós-crítico em  $\phi = \phi_{cr}$ .

Se  $\phi_2 > 0$ , a carga cresce quando  $\hat{e}$  cresce e o equilíbrio é estável. Se, entretanto,  $\phi_2 < 0$ , a curva  $\phi(\hat{e})$  decresce na região pós-crítica inicial, sendo o equilíbrio instável.

Somente no caso em que  $\phi_2 < 0$  é, a estrutura, sensível a imperfeições, isto é, imperfeições geométricas iniciais provocam uma redução no valor da carga máxima que a estrutura pode suportar.

#### IV.2 - CÁLCULO DO CAMPO DE DESLOCAMENTOS $\underline{U}_2$ .

O campo de deslocamentos  $\underline{U}_2$  é obtido através da equação variacional

$$\delta\Phi_2(\underline{U}_2, \phi_{cr}) + \delta\Phi_{21}(\underline{U}_1, \underline{U}_2, \phi_{cr}) = 0 \quad (IV.8)$$

sendo  $\phi_2$  dado pelas expressões (II.25b) e (II.26b) obtidas no capítulo II, substituindo  $\underline{U}_1$  por  $\underline{U}_2$  e  $\phi_{21}$  dado por

$$\Phi_{21}(\underline{U}_1, \underline{U}_2, \phi_{cr}) =$$

$$\int_{-\lambda/2}^{+\lambda/2} \int_0^{2\pi} \left[ u_{1,\xi} w_{1,\xi} w_{2,\xi} + (v_{1,\theta} + w_{1,\theta}) w_{1,\theta} w_{2,\theta} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \left[ w_{1,\xi}^2 u_{2,\xi} + w_{1,\theta}^2 (v_{2,\theta} + w_{2,\theta}) \right] + \right.$$

$$\left. + v \left[ u_{1,\xi} w_{1,\theta} w_{2,\theta} + (v_{1,\theta} + w_{1,\theta}) w_{1,\xi} w_{2,\xi} + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} w_{1,\theta}^2 u_{2,\xi} + \frac{1}{2} w_{1,\xi}^2 (v_{2,\theta} + w_2) \Big] + \\
& + \frac{(1-v)}{2} \Big[ w_{1,\xi} w_{1,\theta} (u_{2,\theta} + v_{2,\xi}) + \\
& + (w_{1,\xi} w_{2,\theta} + w_{2,\xi} w_{1,\theta}) \cdot (u_{1,\theta} + v_{1,\xi}) \Big] d\theta d\xi \quad (\text{IV.9})
\end{aligned}$$

Dando prosseguimento à técnica variacional, obtém-se o seguinte sistema de equações diferenciais lineares

$$\begin{aligned}
& - u_{2,\xi\xi} - \frac{(1-v)}{2} u_{2,\theta\theta} - \frac{(1+v)}{2} v_{2,\xi\theta} - v w_{2,\xi} + \\
& + \delta \left\{ 2 \eta \phi(1+v) \left[ C_3 u_{2,\theta\theta} - (C_3 - C_4) w_{2,\xi\theta\theta} \right] (1 - \beta v) + \right. \\
& + 2 \alpha \eta^3 \left[ C_1 (u_{2,\theta\theta\theta\theta} - 2(1-v) u_{2,\theta\theta}) + (C_2 - C_1) w_{2,\xi\theta\theta\theta} + \right. \\
& \left. \left. + \left[ C_2 + 2(1-v) C_1 \right] w_{2,\xi\theta\theta} \right] \right\} = \\
& = w_{1,\xi} w_{1,\xi\xi} + \frac{(1+v)}{2} w_{1,\theta} w_{1,\xi\theta} + \frac{(1-v)}{2} w_{1,\xi} w_{1,\theta\theta} \quad (\text{IV.10a})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{(1+v)}{2} u_{2,\xi\theta} - v_{2,\theta\theta} - \frac{(1-v)}{2} v_{2,\xi\xi} - w_{2,\theta} = \\
& = w_{1,\theta} w_{1,\theta\theta} + \frac{(1+v)}{2} w_{1,\xi} w_{1,\xi\theta} + \frac{(1-v)}{2} w_{1,\theta} w_{1,\xi\xi} \quad (\text{IV.10b})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \nu u_{2,\xi} + v_{2,\theta} + \left[ w_2 + \phi (1 - \nu^2) (w_{2,\theta\theta} + \beta w_{2,\xi\xi}) + \alpha \nabla^4 w_2 \right] + \\
& + \delta \left\{ 2 \eta \phi (1 + \nu) \left[ (C_4 - C_3) u_{2,\theta\theta} + (C_3 - 2 C_4 + C_5) w_{2,\xi\theta\theta} + \right. \right. \\
& + C_5 w_{2,\xi} \left. \right] (1 - \beta \nu) + 2 \alpha \eta^3 \left[ (C_2 - C_4) u_{2,\theta\theta\theta\theta} + (C_2 + 2(1 - \nu) C_1) u_{2,\theta\theta} \right. \\
& (C_1 - 2 C_2 + C_3) w_{2,\xi\theta\theta\theta\theta} + 2(C_3 - C_2 - (1 - \nu) C_1) w_{2,\xi\theta\theta} + \\
& \left. \left. C_3 w_{2,\xi} \right] \right\} = \\
& = w_{1,\xi\xi} \left[ u_{1,\xi} + \nu (v_{1,\theta} + w_1) \right] + w_{1,\theta\theta} \left[ (v_{1,\theta} + w_1) + \nu u_{1,\xi} \right] + \\
& + (1 - \nu) w_{1,\xi\theta} (u_{1,\theta} + v_{1,\xi}) + w_{1,\xi} \left[ u_{1,\xi\xi} + \frac{(1 - \nu)}{2} u_{1,\theta\theta} + \right. \\
& + \frac{(1 + \nu)}{2} v_{1,\theta\xi} \left. \right] + w_{1,\theta} \left[ v_{1,\theta\theta} + \frac{(1 - \nu)}{2} v_{1,\xi\xi} + \frac{(1 + \nu)}{2} u_{1,\theta\xi} \right] + \\
& + \frac{1}{2} \left[ w_{1,\theta}^2 + \nu w_{1,\xi}^2 \right] \quad \text{(IV.10c)}
\end{aligned}$$

onde as constantes  $C_i$  são dados por (II.31).

Do problema variacional obtém-se, também, as seguintes condições de contorno em  $\xi = \pm \lambda/2$

$$u_{2,\xi} + \nu (v_{2,\theta} + w_2) + \frac{1}{2} (w_{1,\xi}^2 + \nu w_{1,\theta}^2) = 0$$

$$v_2 = 0$$

(IV.11)

$$w_2 = 0$$

$$\alpha \left[ w_{2,\xi\xi} + \nu w_{2,\theta\theta} \right] = 0$$



Analisando o sistema (IV.10) observa-se que os membros esquerdos são derivadas parciais de  $\underline{U}_2$  e os membros direitos são derivadas parciais de  $\underline{U}_1$  o qual já foi calculado durante a resolução do sistema (II.40).

Multiplicando  $\underline{U}_1$  por  $h_a$ , a fim de tornar sua dimensão compatível com a de  $\underline{U}_2$ , e substituindo-o no sistema (IV.10), tem-se para os membros direitos das equações (IV.10a), (IV.10b) e (IV.10c) respectivamente.

$$\begin{aligned} \text{a) } & \frac{1}{4} \cos 2n\theta \sum_i \sum_j K_{3ij} \left[ \sin (q_i - q_j) \xi + \sin (q_i + q_j) \xi \right] + \\ & + \frac{1}{4} \sum_i \sum_j K_{4ij} \left[ \sin (q_i - q_j) \xi + \sin (q_i + q_j) \xi \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.12a})$$

$$\text{b) } \frac{1}{4} \sin 2n\theta \sum_i \sum_j K_{1ij} \cos (q_i + q_j) \xi + K_{2ij} \cos (q_i - q_j) \xi \quad (\text{IV.12b})$$

$$\begin{aligned} \text{c) } & \frac{1}{4} \cos 2n\theta \sum_i \sum_j (K_{5ij} + K_{6ij} + K_{8ij} - K_{9ij} - K_{7ij}) \cos (q_i - q_j) \xi + \\ & + (K_{5ij} + K_{6ij} + K_{7ij} - K_{8ij} - K_{9ij}) \cos (q_i + q_j) \xi + \\ & + \frac{1}{4} \sum_i \sum_j (K_{5ij} + K_{6ij} + K_{7ij} + K_{8ij} + K_{9ij}) \cos (q_i - q_j) \xi + \\ & + (K_{5ij} + K_{6ij} + K_{9ij} - K_{7ij} - K_{8ij}) \cos (q_i + q_j) \xi \end{aligned} \quad (\text{IV.12c})$$

Os coeficientes  $K_{hi,j}$  são dados por

$$K_{1ij} = n^3 A_{3i} A_{3j} + \frac{(1 + \nu)}{2} n A_{3i} A_{3j} q_i q_j + \\ + \frac{(1 - \nu)}{2} n A_{3i} A_{3j} q_i^2$$

$$K_{2ij} = n^3 A_{3i} A_{3j} - \frac{(1 + \nu)}{2} n A_{3i} A_{3j} q_i q_j + \\ + \frac{(1 - \nu)}{2} n A_{3i} A_{3j} q_i^2$$

$$K_{3ij} = A_{3i} A_{3j} q_i q_j^2 + n^2 A_{3i} A_{3j} q_i$$

$$K_{4ij} = A_{3i} A_{3j} q_i q_j^2 - n^2 \nu A_{3i} A_{3j} q_i$$

$$K_{5ij} = -n^2 A_{3i} A_{3j} - n^3 A_{3i} A_{2j} - \nu n^2 A_{3i} A_{1j} q_j$$

$$K_{6ij} = -A_{3i} A_{1j} q_i^2 q_j - \nu (A_{3i} A_{3j} q_i^2 + n A_{3i} A_{2j} q_i^2)$$

$$K_{7ij} = (\nu - 1) (n^2 A_{3i} A_{1j} q_i + n A_{3i} A_{2j} q_i q_j)$$

$$K_{8ij} = A_{3i} A_{1j} q_i q_j^2 + \frac{(1 - \nu)}{2} n^2 A_{3i} A_{1j} q_i + \\ + \frac{(1 + \nu)}{2} n A_{3i} A_{2j} q_i q_j$$

$$K_{9ij} = n^3 A_{3i} A_{2j} + \frac{(1 - \nu)}{2} n A_{3i} A_{2j} q_j^2 + \\ + \frac{(1 + \nu)}{2} n^2 A_{3i} A_{1j} q_j$$

(IV.13)

Vê-se que é impossível encontrar uma solução modal que atenda simultaneamente o sistema de equações diferenciais parciais (IV.10) e as condições de contorno (IV.11).

Atentando-se para a forma de  $\underline{U}_2$  sugerida pelos membros direitos de (IV.10) dados em (IV.12), deve-se buscar uma solução aproximada que atenda às condições de contorno e que minimize o sistema de equações.

Uma solução do sistema (IV.10) que atenda as condições de contorno (IV.11), que seja ortogonal a  $\underline{U}_1$  e que atenda às condições de compatibilidade e continuidade impostas pelo problema, pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} u_2 = & \cos 2n\theta \sum_{i=1, 3, 5, \dots} B_{1i} \sin r_i \xi + \\ & + \sum_{i=1, 3, 5, \dots} B_{2i} \sin r_i \xi \end{aligned} \quad (\text{IV.14a})$$

$$v_2 = \sin 2n\theta \sum_{i=1, 3, 5, \dots} B_{3i} \cos r_i \xi \quad (\text{IV.14b})$$

$$\begin{aligned} w_2 = & \cos 2n\theta \sum_{i=1, 3, 5, \dots} B_{4i} \cos r_i \xi + \\ & + \sum_{i=1, 3, 5, \dots} B_{5i} \cos r_i \xi \end{aligned} \quad (\text{IV.14c})$$

Substituindo (IV.14) nos membros esquerdos de (IV.10) e empregando o método de Galerkin, que tem sido frequentemente usado em problemas semelhantes<sup>1,3</sup>, obtêm-se o sistema de equações não homogêneo

$$[S] \underline{X} = \underline{R} \quad (IV.15)$$

de dimensão  $5M \times 5M$ , onde  $M$  é o número de termos necessários à convergência de  $\phi_2$ .

A solução do sistema (IV.15) nos dará o valor das amplitudes  $B_{hi}$  das funções (IV.14).

Os elementos não nulos da matriz  $[S]$  são dados por,

$$\begin{aligned} S_{i,j} = & \lambda \delta_{ij} \left[ r_m r_n + 2(1 - \nu)n^2 \right] + \\ & + \eta \Delta_{mn} \left[ 8 \alpha \eta^3 NA C_1 (4n^4 + 2(1 - \nu)n^2) - \right. \\ & \left. - 8 NA \phi_{cr} (1 + \nu) C_3 n^2 (1 - \beta \nu) \right] \end{aligned}$$

$$S_{i,j+1} = \lambda \delta_{ij} (1 + \nu) n r_n$$

$$\begin{aligned} S_{i,j+2} = & \lambda \delta_{ij} \nu r_n + \eta \Delta_{mn} \left[ 8 \alpha \eta^2 NA \left[ 4 n^4 (C_1 - C_2) + \right. \right. \\ & + n^2 (C_2 + 2(1 - \nu) C_1) \left. \right] - \\ & \left. - 8 NA \phi_{cr} (1 + \nu) n^2 (C_3 - C_4) (1 - \beta \nu) \right] r_n \end{aligned}$$

$$S_{i+1,j} = \lambda \delta_{ij} \left[ (1 + \nu) n r_n \right]$$

$$S_{i+1,j+1} = \lambda \delta_{ij} \left[ 4n^2 + (1 - \nu)/2 r_m r_n \right]$$

$$S_{i+1,j+2} = 2 \lambda \delta_{ij} n$$

$$S_{i+2,j} = \lambda \delta_{ij} \nu r_m + \eta \Delta_{mn} \left[ 8 \alpha \eta^2 NA \left[ 4 n^4 (C_1 - C_2) + \right. \right. \\ \left. \left. + n^2 (C_2 + 2(1 - \nu)C_1) \right] - 8NA \phi_{cr} (1 - \nu)n^2 (C_3 - C_4) (1 - \beta\nu) \right] r_m$$

$$S_{i+2,j+1} = 2 \lambda \delta_{ij} n$$

$$S_{i+2,j+2} = \lambda \delta_{ij} \left[ 1 - \phi_{cr} (1 - \nu^2) (4n^2 + \beta r_m r_n) + \right. \\ \left. + \alpha (r_m r_n + 4n^2)^2 \right] + \eta \Delta_{mn} \left[ 8 \alpha \eta^2 NA \left[ 4n^4 (C_1 - 2C_2 + C_3) - \right. \right. \\ \left. \left. - 2n^2 (C_3 - C_2 - (1 - \nu)C_1) + C_3 / 4 \right] - \right. \\ \left. - 8 NA \phi_{cr} (1 + \nu) \left[ n^2 (C_3 - 2C_4 + C_5) + C_5 / 4 \right] (1 - \beta\nu) r_m r_n \right]$$

$$S_{i+3,j+3} = 2 \lambda \delta_{ij} r_m r_n$$

$$S_{i+3,j+4} = 2 \, v \, \lambda \, \delta_{ij} \, r_n$$

$$S_{i+4,j+3} = 2 \, v \, \lambda \, \delta_{ij} \, r_m$$

$$S_{i+4,j+4} = 2 \, \lambda \, \delta_{ij} \left[ 1 - \beta (1 - v^2) \phi_{cr} \, r_m \, r_n + \alpha \, r_m^2 \, r_n^2 \right] +$$

$$+ \eta \, \Delta_{mn} \left[ 4 \, \alpha \, \eta^2 \, NA \, C_3 - 4 \, \phi_{cr} \, NA \, (1 + v) C_5 \, (1 - \beta v) \right] r_m \, r_n \quad (IV.16)$$

onde

$$m, n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\begin{aligned} i &= 5m - 4 \\ j &= 5n - 4 \end{aligned} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

$$\Delta_{mn} = (-1)^{\left[ (M_m + M_n + 6) / 2 \right]}$$

$$M = 1, 3, 5, 7, \dots$$

Os elementos do vetor  $\{R\}$  no sistema (IV.15) são dados por

$$R_i = \bar{N}_{1\bar{i}} \, A_{3j} \, A_{3k} \, (q_j^2 \, q_k + q_k \, n^2)$$

$$R_{i+1} = \bar{N}_{2\bar{i}} \, A_{3j} \, A_{3k} \left[ n^3 + \frac{(1 + v)}{2} \, q_j^2 \, n \right] -$$

$$- \bar{N}_{3\bar{i}} \, A_{3j} \, A_{3k} \, \frac{(1 + v)}{2} \, q_j \, q_k \, n$$

$$\begin{aligned}
R_{i+2} = & \bar{N}_{3\bar{i}} \left\{ A_{1j} A_{3k} \left[ q_j^2 q_k + \frac{3(1-\nu)}{2} q_k n^2 \right] + \right. \\
& + (2-\nu) A_{2j} A_{3k} q_j q_k n + \frac{\nu}{2} A_{3j} A_{3k} q_j q_k \left. \right\} - \\
& - \bar{N}_{2\bar{i}} \left\{ A_{1j} A_{3k} q_j \left[ q_k^2 + \frac{(1+3\nu)}{2} n^2 \right] + \right. \\
& + A_{2j} A_{3k} n \left[ 2n^2 + \nu q_k^2 + \frac{(1-\nu)}{2} q_j^2 + A_{3j} A_{3k} \left[ \frac{3}{2} n^2 + \nu q_k^2 \right] \right. \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$R_{i+3} = 2\bar{N}_{1\bar{i}} A_{3j} A_{3k} (q_j^2 q_k - 2\nu q_k n^2)$$

$$\begin{aligned}
R_{i+4} = & \bar{N}_{3\bar{i}} \left\{ A_{1j} A_{3k} q_k \left[ 2 q_j^2 - (1-\nu) n^2 \right] + \right. \\
& + A_{2j} A_{3k} (3\nu - 1) q_j q_k n + A_{3j} A_{3k} \nu q_j q_k \left. \right\} - \\
& - \bar{N}_{2\bar{i}} \left\{ A_{1j} A_{3k} q_j \left[ q_k^2 - (1-\nu) n^2 \right] + \right. \\
& + A_{2j} A_{3k} n \left[ \nu q_k^2 - (1-\nu) q_j^2 \right] + A_{3j} A_{3k} \left[ n^2 + 2\nu q_k^2 \right] \left. \right\} \quad (\text{IV.17})
\end{aligned}$$

onde

$$i = 5m - 4 \quad j = 1, N$$

$$k = 1, N$$

$$m = 1, 2, 3, \dots \quad \bar{i} = 1, M$$

e as constantes  $\bar{N}_{1\bar{i}}$ ,  $\bar{N}_{2\bar{i}}$  e  $\bar{N}_{3\bar{i}}$  são dadas pelas seguintes integrais definidas,

$$\begin{aligned}
 \bar{N}_{1\bar{i}} &= \int_{-\lambda/2}^{+\lambda/2} (\sin q_k \xi \quad \cos q_j \xi \quad \sin r_{\bar{i}} \xi) d\xi \\
 \bar{N}_{2\bar{i}} &= \int_{-\lambda/2}^{+\lambda/2} (\cos q_k \xi \quad \cos q_j \xi \quad \cos r_{\bar{i}} \xi) d\xi \\
 \bar{N}_{3\bar{i}} &= \int_{-\lambda/2}^{+\lambda/2} (\sin q_k \xi \quad \sin q_j \xi \quad \cos r_{\bar{i}} \xi) d\xi
 \end{aligned} \tag{IV.18}$$

Tomando para  $u_1, v_1, w_2$  o número de termos que foram necessários, no problema (II.40), para a convergência de  $\phi_{cr}$ , o campo incremental de deslocamentos  $u_2, v_2, w_2$  pode ser obtido com a solução do sistema (IV.15) tomando para isto um número de termos em (IV.14) suficiente para garantir a convergência de  $\phi_2$ .

#### IV.3 - CÁLCULO DA CURVATURA DO CAMINHO PÓS-CRÍTICO EM $\phi = \phi_{cr}$

Sendo  $\underline{U}_1$  e  $\underline{U}_2$  dados respectivamente por (II.37) e (IV.14) e com (II.25d), (II.26b) e (II.26c), o coeficiente  $\phi_2$  da expansão (IV.2) pode ser obtido usando a expressão (IV.6) cujas parcelas, após se efetuar as integrações, são dadas por

$$\phi_2(\underline{U}_2, \phi_{cr}) =$$

$$\begin{aligned}
 4 \pi \lambda \left\{ \left[ B_{1i} B_{1j} r_i r_j / 2 + B_{2i} B_{2j} r_i r_j + 2 n^2 B_{3i} B_{3j} - \right. \right. \\
 \left. \left. - n (B_{3i} B_{4j} + B_{3j} B_{4i}) + B_{4i} B_{4j} / 2 + B_{5i} B_{5j} \right] + \right.
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \nu \left[ n (B_{1i} B_{3j} + B_{1j} B_{3i}) - \frac{1}{2} (B_{1i} B_{4j} r_i + B_{1j} B_{4i} r_j) + \right. \\
& + (B_{2i} B_{5j} r_i + B_{2j} B_{5i} r_j) \left. \right] + \frac{(1-\nu)}{2} \left[ 2 n^2 B_{1i} B_{1j} + \right. \\
& + n (B_{1i} B_{3j} r_j + B_{1j} B_{3i} r_i) + \frac{1}{2} B_{3i} B_{3j} r_i r_j \left. \right] + \\
& + \alpha \left[ B_{4i} B_{4j} r_i^2 r_j^2 + B_{5i} B_{5j} r_i^2 r_j^2 + 4 n^2 B_{4i} B_{4j} r_i r_j + \right. \\
& + 8 n^4 B_{4i} B_{4j} \left. \right] - \phi_{cr} (1-\nu^2) \left[ B_{4i} B_{4j} (2 n^2 + \beta/2 r_i r_j) + \right. \\
& + \beta B_{5i} B_{5j} r_i r_j \left. \right] \left\} \delta_{ij} - 4 \eta \Pi \phi_{cr} (1+\nu) \left\{ 4 n^2 \left[ C_3 (B_{1i} - B_{4i} r_i) \cdot \right. \right. \right. \\
& \cdot (B_{1j} - B_{4j} r_j) + C_4 \left[ (B_{1i} - B_{4i} r_i) B_{4j} r_j + (B_{1j} - B_{4j} r_j) B_{4i} r_i \right] + \\
& + C_5 B_{4i} B_{4j} r_i r_j \left. \right] + C_5 (B_{4i} B_{4j} + 2 B_{5i} B_{5j}) r_i r_j \left. \right\} (1-\beta \nu) \Delta_{ij} + \\
& + 4 \Pi \alpha \eta^3 \left\{ 16 n^4 \left[ C_1 (B_{1i} B_{4i} r_i) (B_{1j} - B_{4j} r_j) + \right. \right. \\
& + C_2 \left[ (B_{1i} - B_{4i} r_i) B_{4j} r_j + (B_{1j} - B_{4j} r_j) B_{4i} r_i \right] + \\
& + C_3 B_{4i} B_{4j} r_i r_j \left. \right] + C_5 (B_{4i} B_{4j} + 2 B_{5i} B_{5j}) r_i r_j - \\
& - 4 n^2 \left[ C_2 \left[ (B_{1i} - B_{4i} r_i) B_{4j} r_j + (B_{1j} - B_{4j} r_j) B_{4i} r_i \right] + \right. \\
& + 2 C_3 B_{4i} B_{4j} r_i r_j \left. \right] + 8 (1-\nu) \left[ C_1 (B_{1i} - B_{4i} r_i) \cdot \right. \\
& \cdot (B_{1j} - B_{4j} r_j) \left. \right] \left. \right\} \Delta_{ij}
\end{aligned}$$

(IV.19)

onde

$$\begin{aligned} i &= 1, M \\ j &= 1, M \end{aligned} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

$$\Delta_{ij} = (-1)^{\left[ (m_i + m_j + 6) / 2 \right]}$$

$$m = 1, 3, 5, \dots$$

$$\frac{d}{d\phi} \Phi_2(U_1, \phi_{cr}) =$$

$$\begin{aligned} & -2\lambda\Pi(1 - v^2)A_{3i}A_{3j}(n^2 + \beta q_i q_j) \delta_{ij} - \\ & -4\eta\Pi(1 + v) \left\{ n^2 \left[ C_3 (A_{1i} - q_i A_{3i}) (A_{1j} - q_j A_{3j}) + \right. \right. \\ & + C_4 \left[ (A_{1i} - q_i A_{3i}) q_j A_{3j} + (A_{1j} - q_j A_{3j}) q_i A_{3i} \right] + \\ & \left. \left. + C_5 A_{3i} A_{3j} q_i q_j \right] + C_5 A_{3i} A_{3j} q_i q_j \right\} (1 - \beta v) \Delta_{ij} \quad (\text{IV.20}) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} i &= 1, N \\ j &= 1, N \end{aligned} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

$$\Delta_{ij} = (-1)^{\left[ (m_i + m_j + 6) / 2 \right]}$$

$$m = 1, 3, 5, \dots$$

$$\Phi_4(U, \phi_{cr}) =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{3\Pi}{4} \left[ A_{3i} A_{3j} A_{3k} A_{3\ell} q_i q_j q_k q_\ell \right] I_1 + \frac{3\Pi}{4} n^4 A_{3i} A_{3j} A_{3k} A_{3\ell} I_2 + \\
& + \frac{n^2\Pi}{2} A_{3i} A_{3j} A_{3k} A_{3\ell} q_i q_j I_3 + n \Delta_{ijkl} \left\{ \frac{3\Pi}{4} C_5 A_{3i} A_{3j} A_{3k} A_{3\ell} q_i q_j q_k q_\ell + \right. \\
& + \frac{2n^2\Pi}{4} \left[ C_3 (A_{3i} A_{3j} q_i q_j) (A_{1k} - q_k A_{3k}) (A_{1\ell} - q_\ell A_{3\ell}) + \right. \\
& + C_4 A_{3i} A_{3j} A_{3\ell} q_i q_j q_\ell (A_{1k} - q_k A_{3k}) + \\
& + C_4 A_{3i} A_{3j} A_{3k} q_i q_j q_k (A_{1\ell} - q_\ell A_{3\ell}) + \\
& + C_5 A_{3i} A_{3j} A_{3k} A_{3\ell} q_i q_j q_k q_\ell \left. \right] + \\
& + \frac{3n^4\Pi}{4} \left[ C_1 (A_{1i} - q_i A_{3i}) (A_{1j} - q_j A_{3j}) (A_{1k} - q_k A_{3k}) (A_{1\ell} - q_\ell A_{3\ell}) + \right. \\
& + 4 C_2 (A_{1i} - q_i A_{3i}) (A_{1j} - q_j A_{3j}) (A_{1k} - q_k A_{3k}) q_\ell A_{3\ell} + \\
& + 6 C_3 (A_{1i} - q_i A_{3i}) (A_{1j} - q_j A_{3j}) A_{3k} A_{3\ell} q_k q_\ell + \\
& + 4 C_4 (A_{1i} - q_i A_{3i}) A_{3j} A_{3k} A_{3\ell} q_j q_k q_\ell + \\
& + C_5 A_{3i} A_{3j} A_{3k} A_{3\ell} q_i q_j q_k q_\ell \left. \right\} \quad (IV.21)
\end{aligned}$$

onde

$$i, j, k, \ell = 1, N$$

$$\Delta_{ijkl} = (-1)^{\left[ (m_i + m_j + m_k + m_\ell + 12) / 2 \right]}$$

e as constantes  $I_i$  são dadas pelas integrais

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_{-\lambda/2}^{+\lambda/2} (\sin q_i \xi \quad \sin q_j \xi \quad \sin q_k \xi \quad \sin q_\ell \xi) d\xi \\
 I_2 &= \int_{-\lambda/2}^{+\lambda/2} (\cos q_i \xi \quad \cos q_j \xi \quad \cos q_k \xi \quad \cos q_\ell \xi) d\xi \\
 I_3 &= \int_{-\lambda/2}^{+\lambda/2} (\sin q_i \xi \quad \sin q_j \xi \quad \cos q_k \xi \quad \cos q_\ell \xi) d\xi
 \end{aligned} \tag{IV.21}$$

Obtido  $\phi_2$ , o comportamento pós-crítico inicial da casca enrijecida sob pressão externa passa a ser descrito de forma aproximada, com o truncamento das expansões (IV.1) e (IV.2), por

$$\begin{aligned}
 u &= u_0 + u_1 \hat{\varepsilon} + u_2 \hat{\varepsilon}^2 \\
 v &= v_1 \hat{\varepsilon} + v_2 \hat{\varepsilon}^2 \\
 w &= w_0 + w_1 \hat{\varepsilon} + w_2 \hat{\varepsilon}^2 \\
 \phi &= \phi_{cr} + \phi_2 \hat{\varepsilon}^2
 \end{aligned} \tag{IV.23}$$

#### IV.4 - CÁLCULO DE $\phi_2$ PARA CASCA SIMPLESMENTE APOIADA

Para o caso de casca cilíndrica simplesmente apoiada, o sistema (IV.10) se reduz a

$$\begin{aligned}
& -u_{2,\xi\xi} - \frac{(1-\nu)}{2} u_{2,\theta\theta} - \frac{(1+\nu)}{2} v_{2,\xi\theta} - \nu w_{2,\xi} = \\
& w_{1,\xi} w_{1,\xi\xi} + \frac{(1+\nu)}{2} w_{1,\theta} w_{1,\xi\theta} + \frac{(1-\nu)}{2} w_{1,\xi} w_{1,\theta\theta} \quad (\text{IV.24a})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{(1+\nu)}{2} u_{2,\xi\theta} - v_{2,\theta\theta} - \frac{(1-\nu)}{2} v_{2,\xi\xi} - w_{2,\theta} = \\
& w_{1,\theta} w_{1,\theta\theta} + \frac{(1+\nu)}{2} w_{1,\xi} w_{1,\xi\theta} + \frac{(1-\nu)}{2} w_{1,\theta} w_{1,\xi\xi} \quad (\text{IV.24b})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \nu u_{2,\xi} + v_{2,\theta} + \left[ w_2 + \phi_{cr}(1-\nu^2) (w_{2,\theta\theta} + \beta w_{2,\xi\xi}) + \alpha \nabla^4 w_2 \right] = \\
& = w_{1,\xi\xi} \left[ u_{1,\xi} + \nu (v_{1,\theta} + w_1) \right] + w_{1,\theta\theta} \left[ (v_{1,\theta} + w_1) + \nu u_{1,\xi} \right] + \\
& + (1-\nu) w_{1,\xi\theta} (u_{1,\theta} + v_{1,\xi}) + w_{1,\xi} \left[ u_{1,\xi\xi} + \frac{(1-\nu)}{2} u_{1,\theta\theta} \right. \\
& + \left. \frac{(1+\nu)}{2} v_{1,\xi\theta} \right] + w_{1,\theta} \left[ v_{1,\theta\theta} + \frac{(1-\nu)}{2} v_{1,\xi\xi} + \frac{(1+\nu)}{2} u_{1,\xi\theta} \right] + \\
& + \frac{1}{2} \left[ w_{1,\theta}^2 + \nu w_{1,\xi}^2 \right] \quad (\text{IV.24c})
\end{aligned}$$

sendo as condições de contorno dados por (IV.11).

Tendo o sistema (IV.24) as mesmas condições de contorno e os mesmos membros direitos do sistema (IV.9) a solução para  $\underline{U}_2$  tem a forma dada em (IV.14). O vetor  $\underline{U}_1$  para a casca simplesmente apoiada é dado por (II.46).

Substituindo  $\underline{U}_1$  e  $\underline{U}_2$  em (IV.24) as amplitudes  $B_{hi}$  de  $\underline{U}_2$ , já que não há interação de modos longitudinais, são calculados por Galerkin que nos fornece os seguintes sistemas

$$2\lambda \begin{bmatrix} r_i^2 & \vdots & v r_i \\ v r_i & 1 + \alpha r_i & -\beta(1-v^2)\phi_{cr} r_i^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B_{2i} \\ B_{5i} \end{Bmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 2N_{1i}(q^3 - v q n^2) \\ N_{3i} \left[ A_1 (2q^3 - (1-v)n^2 q) + A_2 (3v-1)q^2 n + v q^2 \right] - \\ - N_{2i} \left[ A_1 (q^3 - (1-v)n^2 q) + A_2 (2v-1)q^2 n + n^2 + 2v q^2 \right] \end{array} \right\} \quad (IV.25)$$

$$\begin{bmatrix} r_i^2 + 2(1-v)n^2 & n r_i (1+v) & \vdots & v r_i \\ n r_i (1+v) & 4n^2 + (1-v)r_i^2/2 & \vdots & 2n \\ v r_i & 2n & 1 - \phi_{cr}(1-v)(4n^2 + \beta r_i^2) + \\ & & + \alpha (r_i^2 + 4n^2)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B_{1i} \\ B_{3i} \\ B_{4i} \end{Bmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} N_{1i}(q^3 + q n^2) \\ N_{2i} n^3 + (1+v)q^2 n (N_{2i} - N_{3i})/2 \\ N_{3i} \left[ A_1 (q^3 + 3(1-v)n^2 q/2) + A_2 q^2 n(2-v) + v q^2/2 \right] - \\ - N_{2i} \left[ A_1 (q^3 + (1+3v)n^2 q/2) + A_2 (2n^3 + (1+v)q^2 n/2) + 3n^2/2 + v q^2 \right] \end{array} \right\} \quad (IV.26)$$

As constantes  $N_{ji}$  nos sistemas (IV.25) e (IV.26) são dadas pelas expressões (IV.17) para o caso em que  $q_k = q_j = (\pi/\lambda)$ .

Obtidos  $\underline{U}_1$  e  $\underline{U}_2$  e com o auxílio de (II.25b) e (II.25d), o coeficiente  $\phi_2$ , relacionado à curvatura do caminho pós-crítico

em  $\phi = \phi_{cr}$ , é dado pela expressão (IV.6) cujas parcelas são dadas por

$$\begin{aligned} \phi_2(U_{-2}, \phi_{cr}) = & 4\pi\lambda \left\{ \left[ B_{1i}^2 r_i^2/2 + B_{2i}^2 r_i^2 + 2n^2 B_{3i}^2 - 2n B_{3i} B_{4i} + B_{4i}^2/2 + B_{5i}^2 \right] + \right. \\ & + v \left[ 2n B_{1i} B_{3i} - B_{1i} B_{4i} r_i + 2 B_{2i} B_{5i} r_i \right] + \frac{(1-v)}{2} \left[ 2n^2 B_{1i}^2 + \right. \\ & + 2n B_{1i} B_{3i} r_i + B_{3i}^2 r_i/2 \left. \right] + \alpha \left[ B_{4i}^2 r_i^4 + B_{5i}^2 r_i^4 + 4n^2 B_i^4 r_i^2 + \right. \\ & \left. + 8n^4 B_{4i}^2 \right] - \phi_{cr}(1-v^2) \left[ B_{4i}^2(2n^2 + \beta r_i^2/2) + \beta B_{5i}^2 r_i^2 \right] \left. \right\} \quad (IV.27a) \end{aligned}$$

$$i = 1, M$$

$$\frac{d}{d\phi} \phi_2(U_{-1}, \phi_{cr}) = -2\pi\lambda(1-v^2)A_3^2(n^2 + \beta q^2) \quad (IV.27b)$$

$$\phi_4(U_{-1}, \phi_{cr}) = A_3^4 \pi\lambda \left[ \frac{9q^4}{32} + \frac{n^2 q^2}{16} + \frac{9n^4}{32} \right] \quad (IV.27c)$$

Os resultados relativos ao cálculo do coeficiente  $\phi_2$  para a casca cilíndrica sob pressão externa sem enrijecedores (equações (IV.27)) e com enrijecedores (equações (IV.19), (IV.20) e (IV.21)) são apresentados e discutidos no próximo capítulo.

## CAPÍTULO V

### COMPORTAMENTO PÓS-CRÍTICO INICIAL E SENSIBILIDADE A IMPERFEIÇÕES: RESULTADOS NUMÉRICOS



## CAPÍTULO V

COMPORTAMENTO PÓS-CRÍTICO INICIAL E SENSIBILIDADE  
A IMPERFEIÇÕES: RESULTADOS NUMÉRICOS

## V.1 - IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

A solução do sistema (IV.15) cujos elementos são dados pelas expressões (IV.16) e (IV.17) fornece as amplitudes do modo secundário  $\underline{U}_2$ . Esta solução foi obtida pelo método de Gauss, sendo usada precisão dupla e a triangularização da matriz obtida após rearranjo do sistema numa forma análoga àquela utilizada para o cálculo de  $\phi_{cr}$ , a qual é descrita na seção III.1.

Agora, com as amplitudes de  $\underline{U}_1$  e  $\underline{U}_2$  e com o valor de  $\phi_{cr}$ ,  $\phi_2$  pode ser calculado através da expressão (IV. 6) cujas parcelas são dadas por (IV.19), (IV.20) e (IV.21).

Para o caso particular da casca isotrópica, os resultados são obtidos através da sequência de cálculo descrita anteriormente mas fazendo-se o número de anéis igual a zero.

V.2 - RESULTADOS REFERENTES AO CAMINHO PÓS-CRÍTICO INICIAL DA  
CASCA ISOTRÓPICA

O valor dos coeficientes  $\phi_2$  que se relaciona, como foi visto no item IV.1, ao grau de sensibilidade a imperfeições da estrutura, foi obtido, para a casca isotrópica, usando para  $\underline{U}_2$  as expansões (IV.14) apresentadas no capítulo anterior.

Dividindo-se a expansão (IV.23) por  $\phi_{cr}$  e chamando a razão  $\phi_2/\phi_{cr}$  de  $b$  (notação largamente usada na literatura especializada), a expansão (IV.23) pode ser reescrita na forma,

$$\phi/\phi_{cr} = 1 + b \hat{\varepsilon}^2 \quad (V.1)$$

No estudo que se segue será usada a variável  $b$  como parâmetro de sensibilidade a imperfeições.

Usou-se na expansão de  $U_2$  o número de termos necessários à convergência de  $\phi_2$ , de tal maneira que o erro relativo fosse sempre menor ou igual a meio por cento. A figura (V.1) mostra várias curvas de convergência de  $b = \phi_2/\phi_{cr}$  em função do número de modos longitudinais,  $M$ . Verifica-se que a convergência é bastante rápida e, com quatro modos, a convergência é obtida.

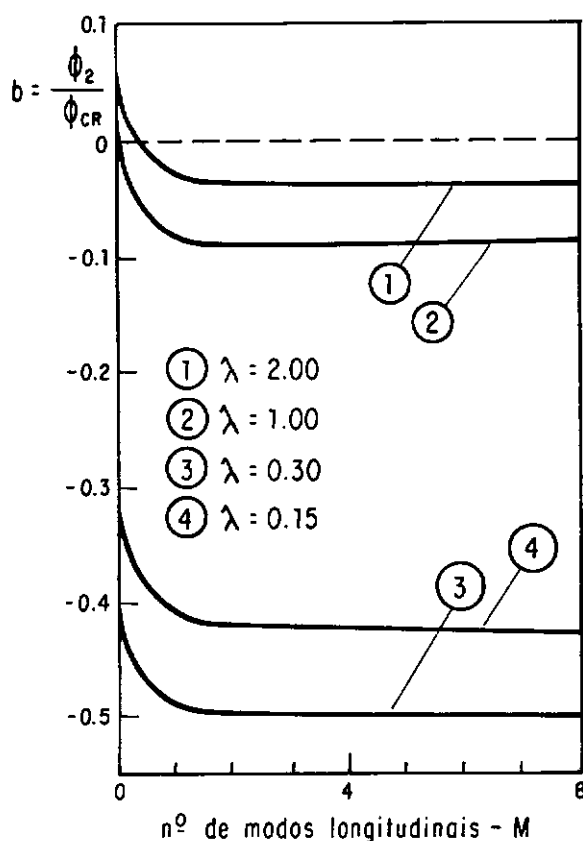


FIG. V.1—CONVERGÊNCIA NUMÉRICA DO PARÂMETRO  $b$ .

A figura (V.2) mostra a influência dos modos secundários assimétricos e axissimétricos das expansões (IV.14) sobre o parâmetro  $b$ , quando este varia com o parâmetro geométrico  $Z$ . Nesta figura a curva 1 foi obtida com modos assimétricos e a curva 2, com os modos axissimétricos. Constata-se que em ambos os casos a estrutura se mostra insensível a imperfeições já que o valor de  $b$  é sempre positivo. Estes resultados contradizem os resultados experimentais e mostram ser indispensável o uso simultâneo de modos assimétricos e axissimétricos nas expansões (IV.14).

O resultado de  $b$  vs.  $Z$  usando as expansões completas (modos assimétricos e axissimétricos) é apresentado na figura (V.3). Neste caso, ao contrário do observado na figura (V.2), a estrutura se mostra sensível a imperfeições iniciais ( $b < 0$ ) para uma faixa significativa do parâmetro geométrico  $Z$ , decrescendo a medida que  $Z$  cresce (casca mais longas), sendo a sensibilidade praticamente nula para valores de  $Z > 10^3$ .

Este comportamento é explicado pelo fenômeno de acoplamento modal<sup>13</sup> e é ilustrado pela figura (V.4); o comportamento pós-crítico da casca para uma única forma modal, isto é, assimétrica ou axissimétrica, é sempre estável, enquanto a resposta devida ao acoplamento entre essas formas modais é definitivamente instável, com perda de rigidez associada a um aumento de deformação.

O grau de sensibilidade à imperfeição é governado pela magnitude do parâmetro  $b$  de uma maneira que pode ser julgada quantitativamente pelas curvas apresentadas na figura (V.6) que mostra a variação de  $\phi_s/\phi_{cr}$  com  $(\bar{\delta}/H_c)$ . Estas curvas são obtidas usando a expressão

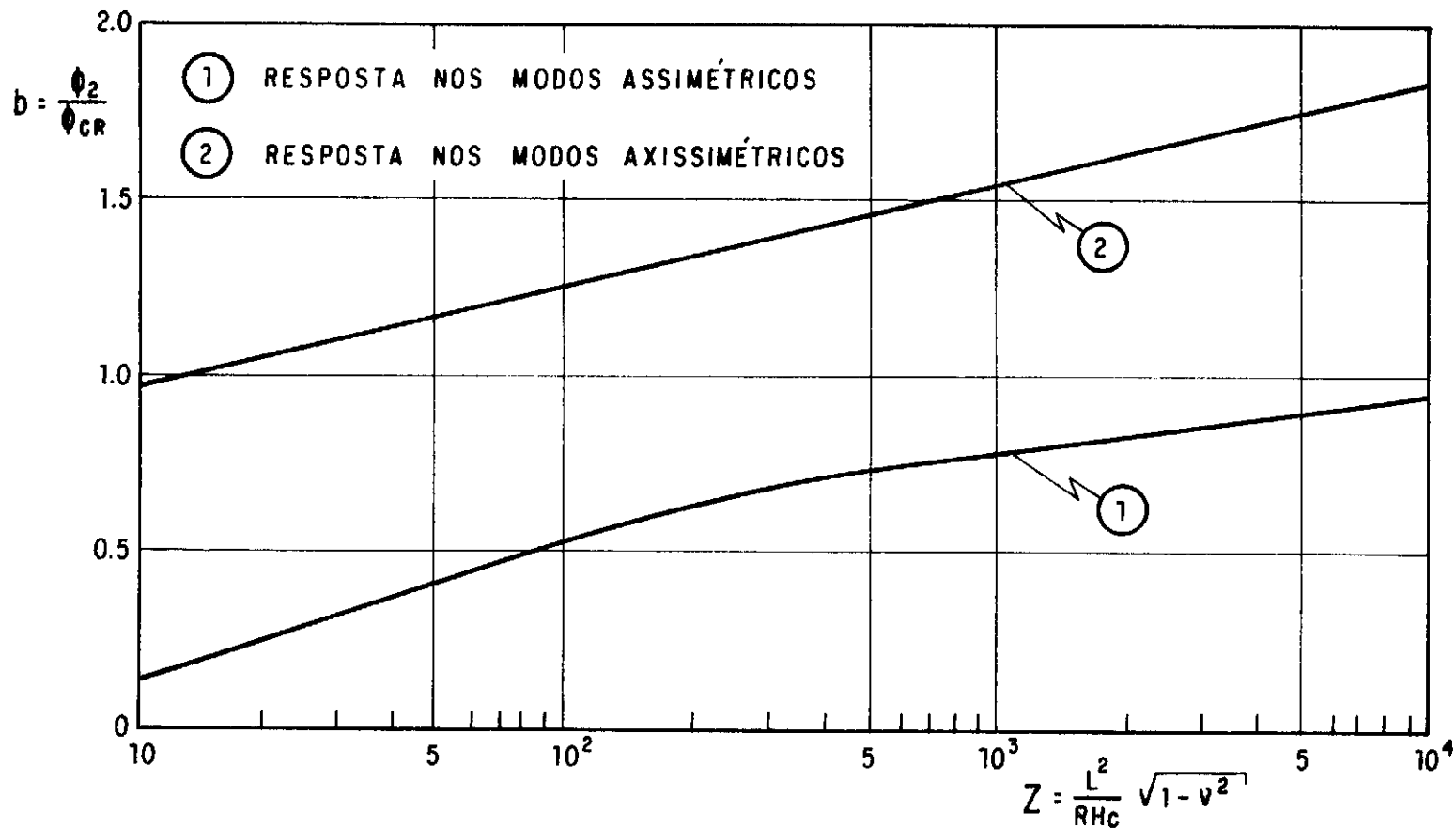


FIG. V. 2 — VARIAÇÃO DA SENSIBILIDADE A IMPERFEIÇÕES EM FUNÇÃO DO PARÂMETRO GEOMÉTRICO Z — CASCA ISOTRÓPICA SOB PRESSÃO LATERAL.

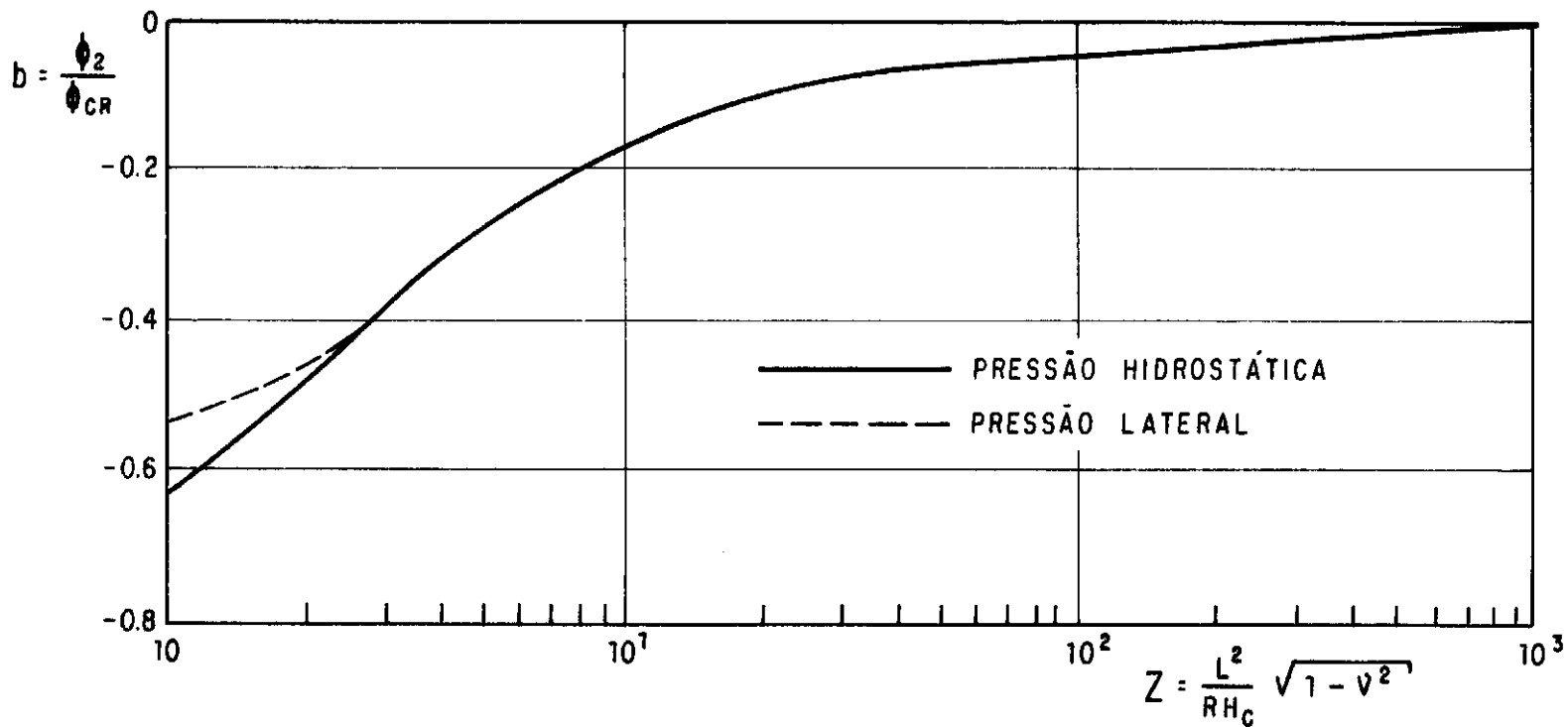


FIG. V.3 – VARIAÇÃO DA SENSIBILIDADE A IMPERFEIÇÕES EM FUNÇÃO DO PARÂMETRO Z – MODOS ACOPLADOS.

$$\left(1 - \frac{\phi_s}{\phi_{cr}}\right)^{3/2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \left| \frac{\bar{\delta}}{H_c} \right| \sqrt{-b} \frac{\phi_s}{\phi_{cr}} \quad (V.2)$$

deduzida por Koiter<sup>29</sup>, onde  $\bar{\delta}$  é a amplitude da imperfeição inicial e  $\phi_s$ , a carga de flambagem da casca imperfeita, conforme ilustrado nas figuras (V.5a) e (V.5b) para o caso presente de bifurcação simétrica instável.

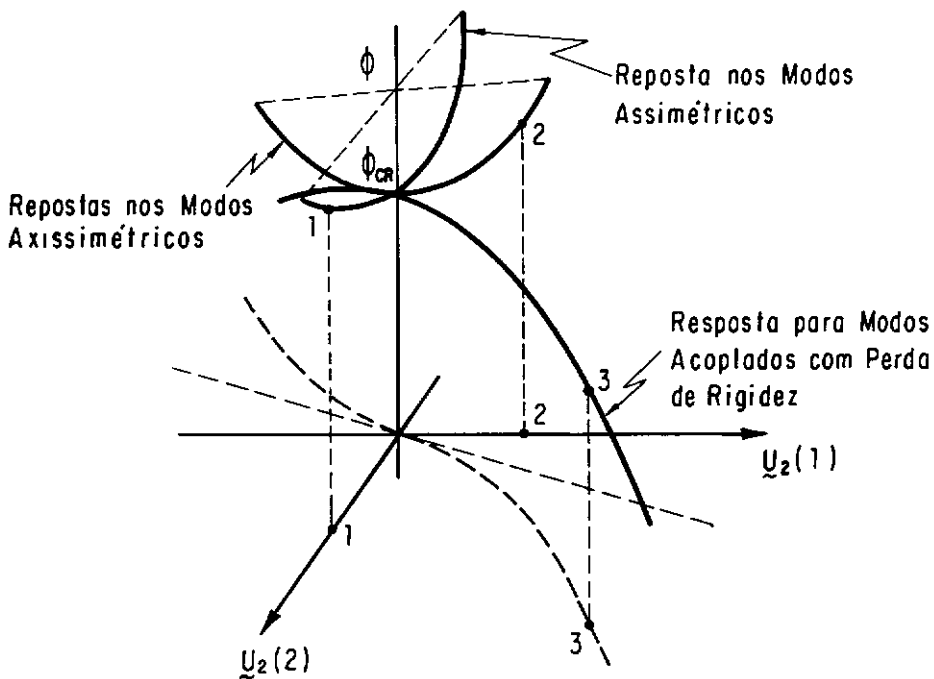


FIG. V.4 – EFEITO DO ACOPLAMENTO ENTRE MODOS SOBRE A ESTABILIDADE DO PONTO CRÍTICO DE EQUILÍBRIO.

As figuras (V.7) e (V.8) mostram a variação da sensibilidade a imperfeições,  $b$ , em função do número de ondas circunferenciais,  $n$ , para várias geometrias. Verifica-se que, a medida que o número de ondas circunferenciais decresce, o valor de  $b$

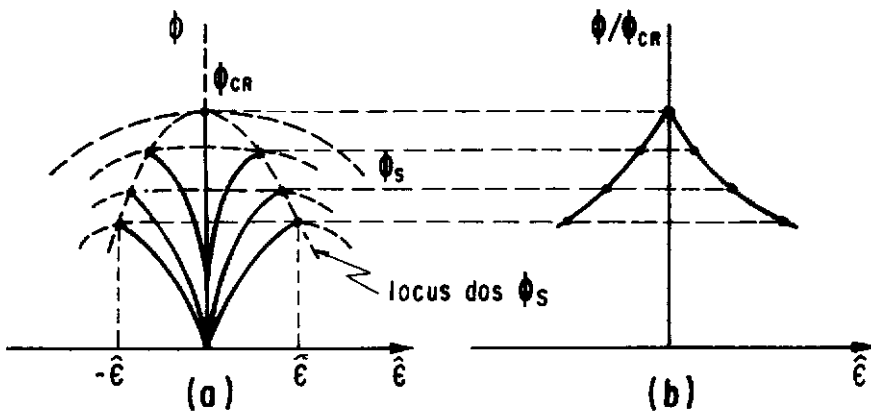


FIG. V.5 – SENSIBILIDADE A IMPERFEIÇÕES INICIAIS DE SISTEMAS CARACTERIZADOS POR BIFURCAÇÃO SIMÉTRICA INSTÁVEL.

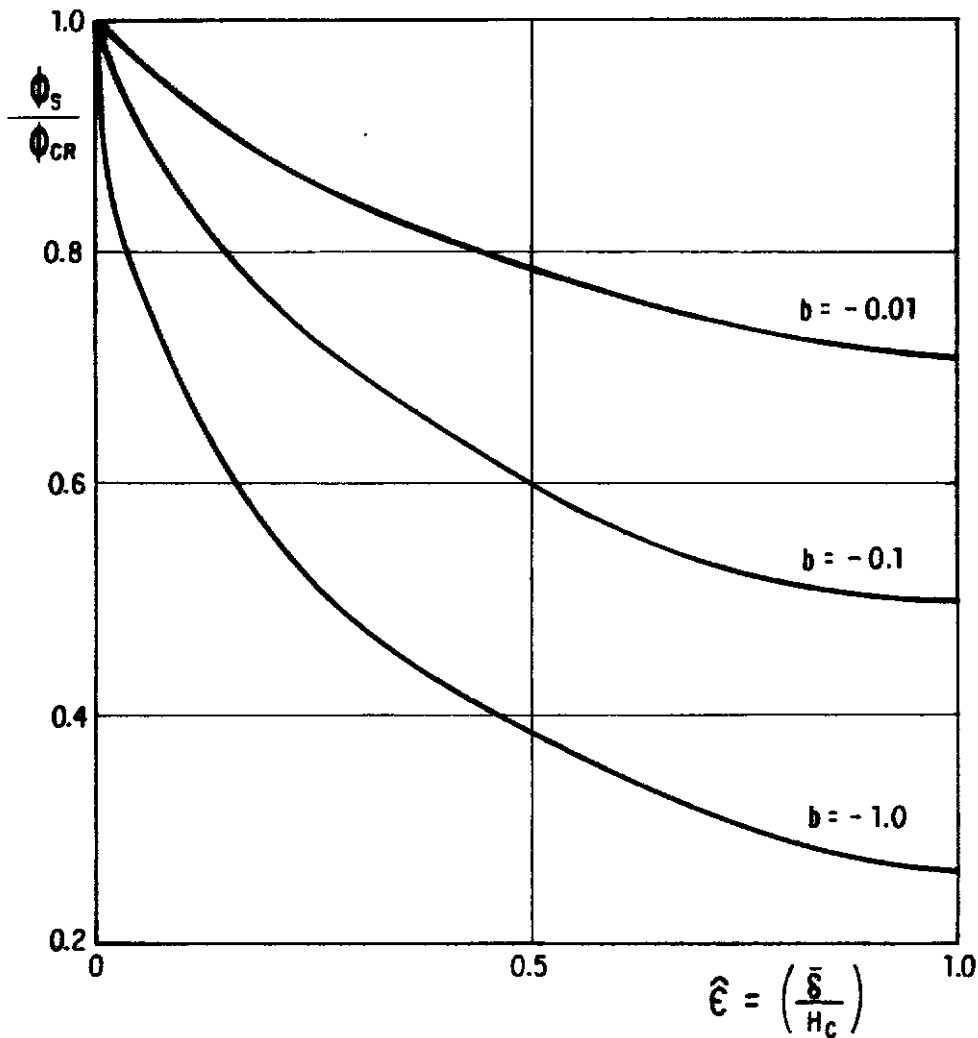


FIG. V.6 – INFLUÊNCIA DO PARÂMETRO  $b$  E DA AMPLITUDE DA IMPERFEIÇÃO  $\hat{\epsilon}$  NA CARGA DE FLAMBAGEM,  $\phi_s$ .

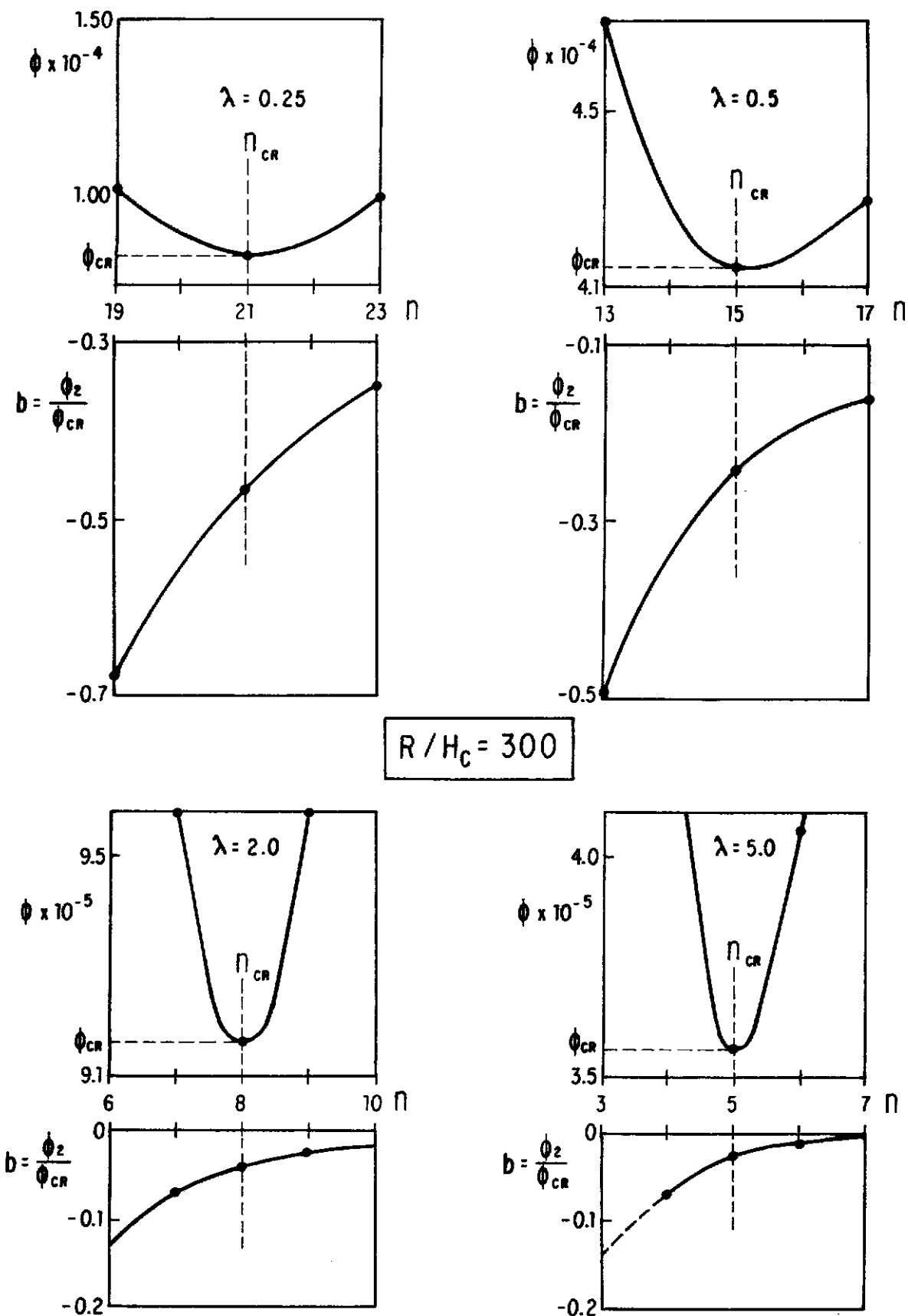


FIG. V.7 — VARIAÇÃO DO PARÂMETRO DE CARGA,  $\phi$ , E DA SENSIBILIDADE A IMPERFEIÇÕES,  $b$ , COM O NÚMERO DE ONDAS CIRCUNFERENCIAIS,  $n$ .



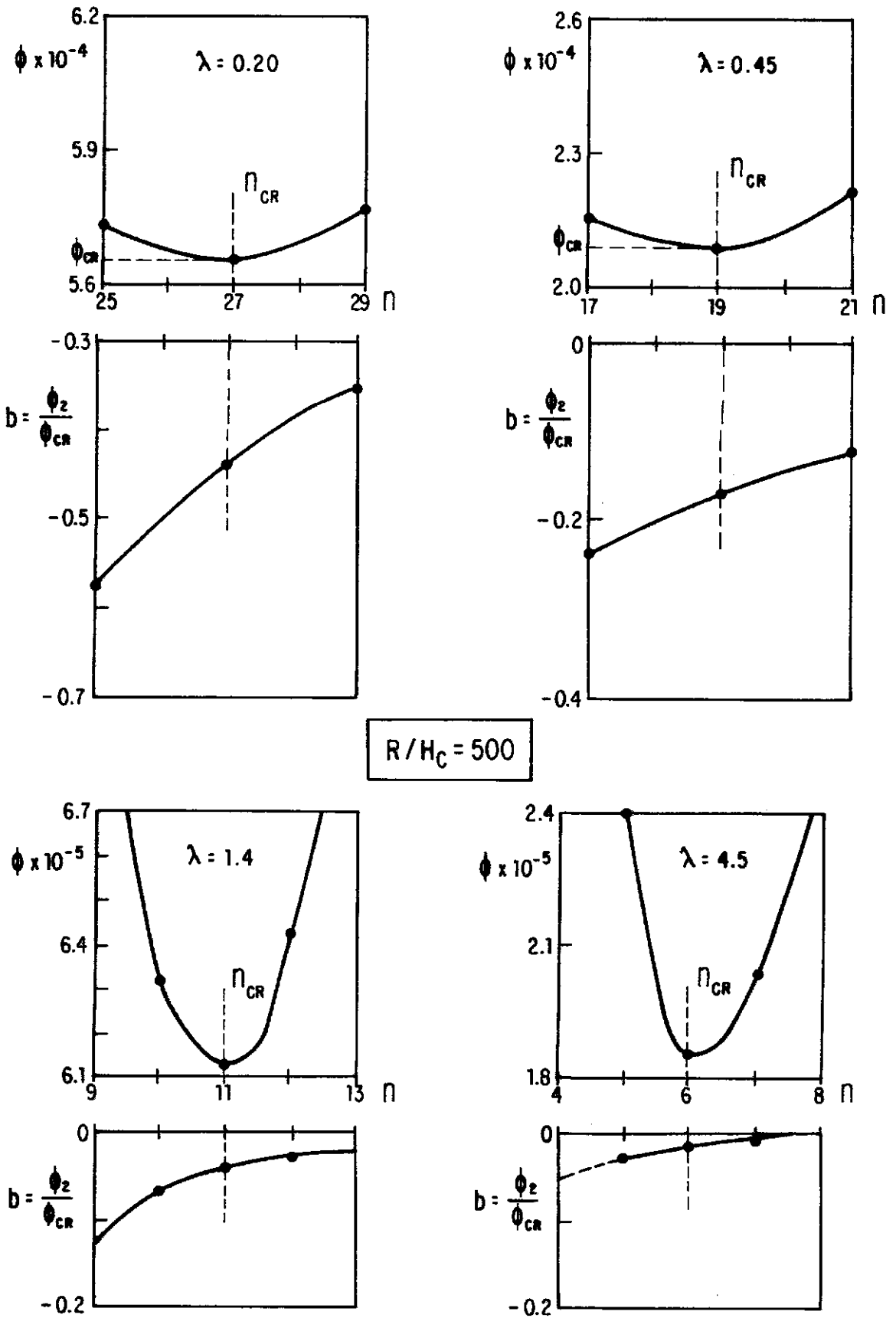


FIG. V.8 — VARIAÇÃO DO PARÂMETRO DE CARGA,  $\phi$ , E DA SENSIBILIDADE A IMPERFEIÇÕES,  $b$ , COM O NÚMEROS DE ONDAS CIRCUNFERENCIAIS,  $n$ .

cresce significativamente. Vê-se que este comportamento, independente de  $R/H_c$ , é bastante acentuado para cascas curtas ( $\lambda < 1.0$ ), sendo ainda bastante significativo para cascas de comprimento médio ( $1.0 < \lambda \leq 5.0$ ).

Para a discussão que se segue é importante se enfatizar aqui que o parâmetro  $b$  é sempre obtido através de um procedimento no qual os modos críticos, com  $(m, n) = (1, n_{cr})$ , são dados básicos. Assim as figuras (V.2) à (V.6) são relacionadas a valores de  $\phi_{cr}$  e  $n_{cr}$  mostrados, para certas geometrias, nas figuras (V.7) e (V.8).

A partir do exposto pode-se então argumentar que se as imperfeições existentes na estrutura induzirem um colapso em um modo com um número de ondas circunferenciais  $n > n_{cr}$ , a casca será menos sensível a estas imperfeições do que a imperfeições na forma do modo crítico ( $n = n_{cr}$ ). Se, ao contrário, as imperfeições induzirem um colapso em um modo com  $n < n_{cr}$ , a sensibilidade a estas imperfeições cresce significativamente com o decréscimo de  $n$ , conforme se observou anteriormente nas figuras (V.7) e (V.8).

Este comportamento pode ser explicado através dos estudos desenvolvidos por Batista<sup>13</sup> sobre a variação da energia de membrana e de flexão em cascas cilíndricas em função do número de ondas circunferenciais,  $n$ . Os resultados deste estudo mostram que para  $n < n_{cr}$  a contribuição da energia de membrana é superior a da energia de flexão. Esta diferença decai à medida que  $n$  cresce, tornando-se a energia de flexão superior a de membrana para  $n > n_{cr}$ . Sabe-se<sup>13, 33</sup> que o mecanismo da perda de estabilidade se dá, justamente, quando, através de algum caminho, a ener

gia de membrana da casca se transforma em energia de flexão; logo, quanto menor o valor de  $n$ , maior a contribuição da energia de membrana em relação à energia total da casca e, portanto, maior a sensibilidade a imperfeições e potencialmente maiores as possíveis reduções da carga de flambagem.

### V.3 - RESULTADOS REFERENTES AO CAMINHO PÓS CRÍTICO INICIAL DA CASCA ENRIJECIDA

Para se obter o valor de  $b$  para a casca com enrijecedores espaçados, toma-se primeiramente o vetor  $\underline{U}_1$  com um número de termos que garanta a convergência de  $\phi_{cr}$  e em seguida o vetor  $\underline{U}_2$  com um número de termos (sempre maior que o tomado para  $\underline{U}_1$ ) necessário à convergência de  $\phi_2$ .

A figura (V.9) mostra a convergência de  $b$  com o número de modos longitudinais,  $M$ , de  $\underline{U}_2$  e demonstra a eficiência do processo numérico utilizado.

Os resultados relativos à sensibilidade a imperfeições para a casca cilíndrica enrijecida são apresentadas na figura (V.10) a qual mostra a variação  $b$  com o parâmetro de Batdorf  $Z$ . Vê-se que a casca enrijecida, assim como a isotrópica, é sensível a imperfeições, isto é,  $b < 0$ . Para valores de  $Z > 100$ , os resultados da casca enrijecida e isotrópica coincidem. Na região de  $10 \leq Z \leq 100$  a casca enrijecida apresenta menor sensibilidade a imperfeições, com o parâmetro  $b$  chegando a ser quase metade do valor correspondente à casca isotrópica.

Este decréscimo de sensibilidade a imperfeições é uma decorrência do acréscimo do número crítico de ondas circunferenciais da casca enrijecida em relação ao número crítico de on-

das associado à casca isotrópica; isto pode ser observado com o auxílio das figuras (V.10) e (III.10) (Cap. III).

Verifica-se que o enrijecimento, embora diminua a sensibilidade a imperfeições de cascas curtas, não é capaz de conferir um comportamento estável a estas estruturas, isto é, de tornar  $b$  positivo.

A variação da sensibilidade a imperfeições,  $b$ , em função do número de ondas circunferenciais,  $n$ , é mostrado na figura (V.11) para certas geometrias de casca. Aqui, como para o caso isotrópico, também se nota um aumento da sensibilidade a imperfeições a medida que  $n$  decresce, embora este aumento não seja tão acentuado como no caso da casca isotrópica.

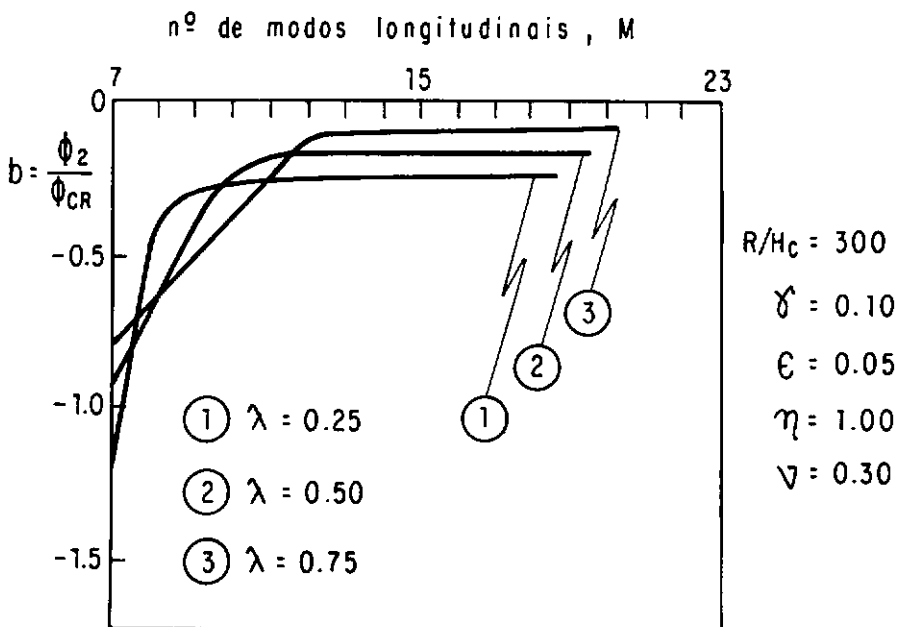


FIG. V.9 – CONVERGÊNCIA DO PARÂMETRO  $b$  COM O NÚMERO DE MODOS LONGITUDINAIS,  $M$  - CASCA ENRIJECIDA SOB PRESSÃO LATERAL

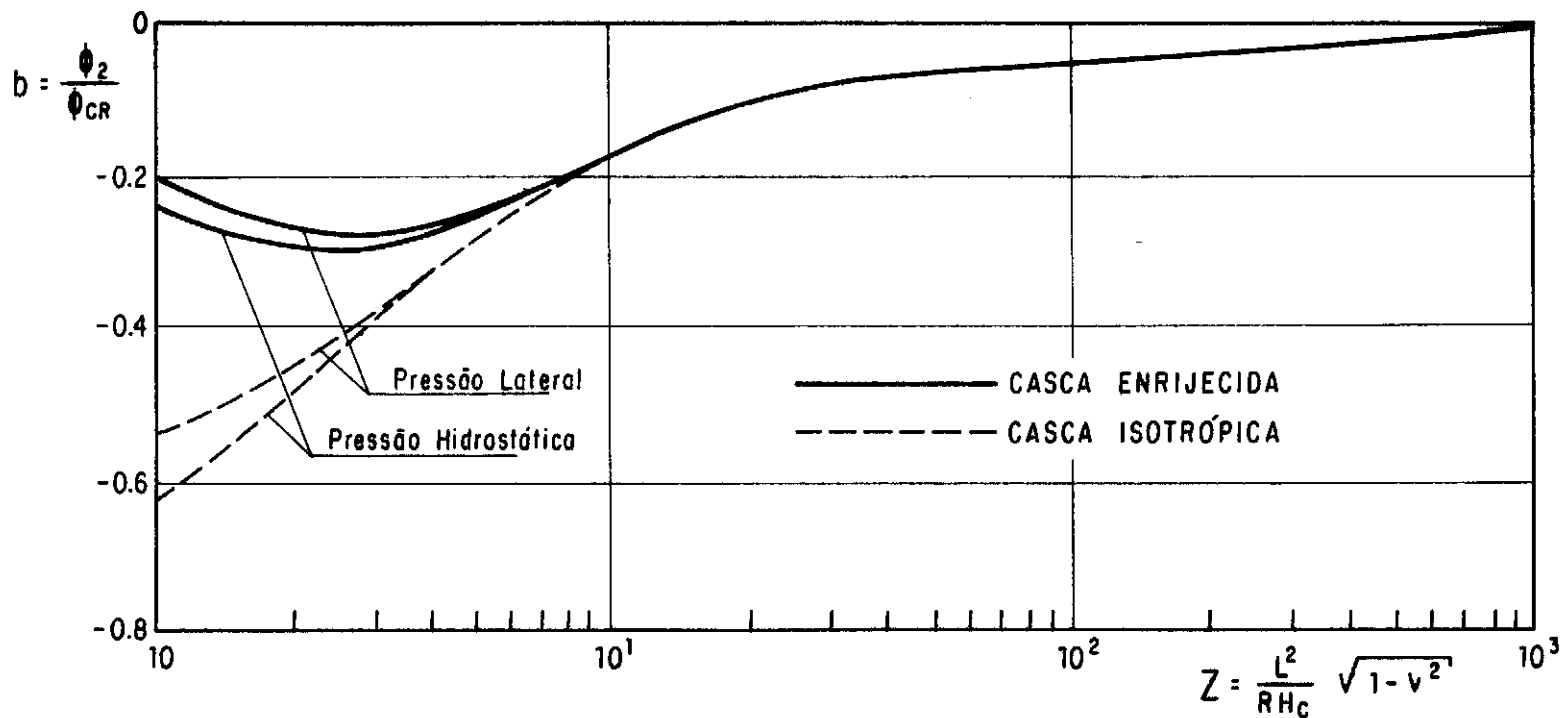
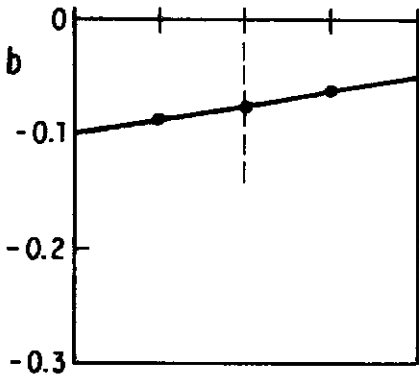
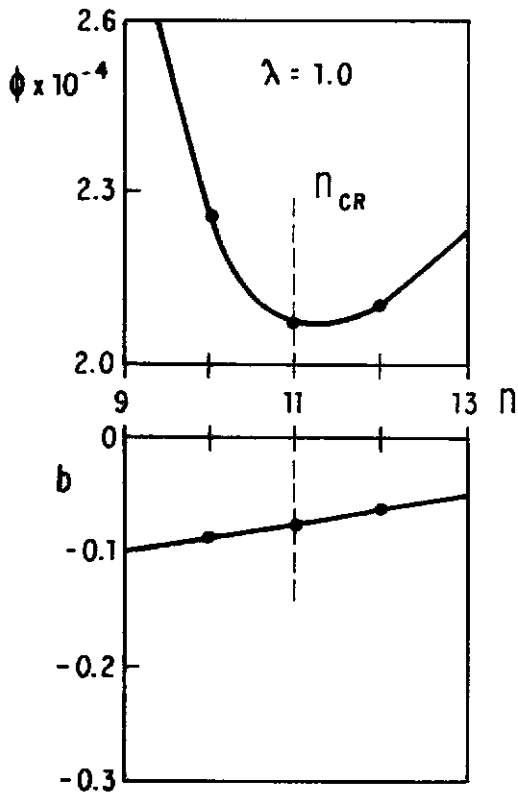
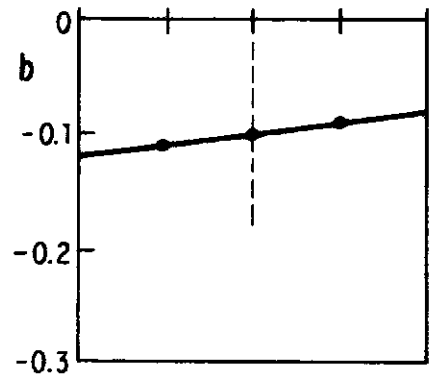
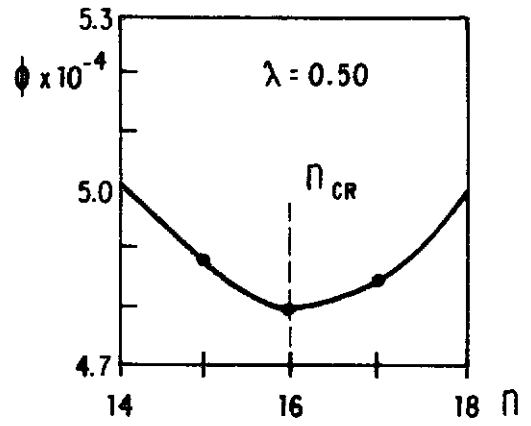
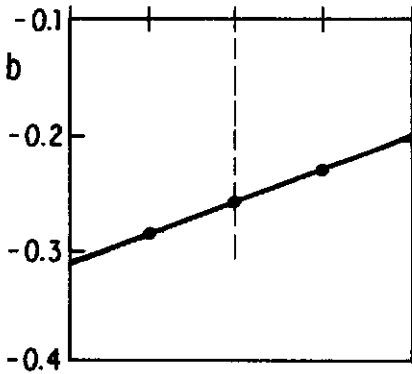
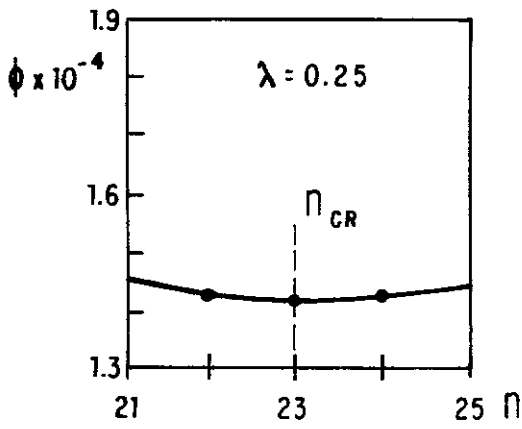


FIG. V.10 — VARIAÇÃO DA SENSIBILIDADE A IMPERFEIÇÕES EM FUNÇÃO DO PARÂMETRO Z — RESPOSTA VÁLIDA PARA GEOMETRIAS PRÁTICAS DE ENRIJECEDORES.



$$R/H_C = 300$$

$$\gamma = 0.10$$

$$\epsilon = 0.05$$

$$\eta = 1.00$$

$$\nu = 0.30$$

FIG. V.11 — VARIAÇÃO DO PARÂMETRO DE CARGA,  $\phi$ , E DA SENSIBILIDADE A IMPERFEIÇÕES,  $b$ , COM O NÚMERO DE ONDAS CIRCUNFERENCIAIS,  $n$  - CASCA ENRIJECIDA SOB PRESSÃO LATERAL.

## CAPÍTULO VI

### CORRELAÇÃO ENTRE RESULTADOS TEÓRICOS E EXPERIMENTAIS

## CAPÍTULO VI

## CORRELAÇÃO ENTRE RESULTADOS TEÓRICOS E EXPERIMENTAIS

## VI.1 - INTRODUÇÃO

Estruturas reais são inevitavelmente imperfeitas, mesmo quando fabricadas por processos altamente sofisticados. Estas imperfeições têm origem em imprecisões geométricas, defeitos de material ou processos de montagem e transporte e podem ter influência significativa sobre o comportamento e capacidade de carga das estruturas. Se a estrutura é sensível a imperfeições, como no caso das estruturas aqui analisadas, existe a possibilidade de reduções substanciais da carga máxima que a estrutura pode suportar. Tem-se, pois, uma carga de flambagem,  $\phi_s$ , que pode ser significativamente menor que  $\phi_{cr}$ , mesmo sendo as imperfeições de pequena magnitude. A redução da carga, como se viu no capítulo anterior (figura V.6), é função do grau de sensibilidade a imperfeições e das amplitudes destas imperfeições.

Devido a este comportamento, a amplitude  $\bar{\delta}$  da imperfeição deve ser limitada. Para o caso aqui estudado as normas internacionais<sup>38, 40</sup> recomendam medir os desvios locais tanto em relação à geratriz do cilindro (fig. VI.1a) bem como em relação à forma circular (fig. VI.1b) e estabelecem os valores máximos toleráveis. As imperfeições devem ser de pequena magnitude, sendo que para a maioria das geometrias usadas na prática não devem exceder o valor da espessura da casca.



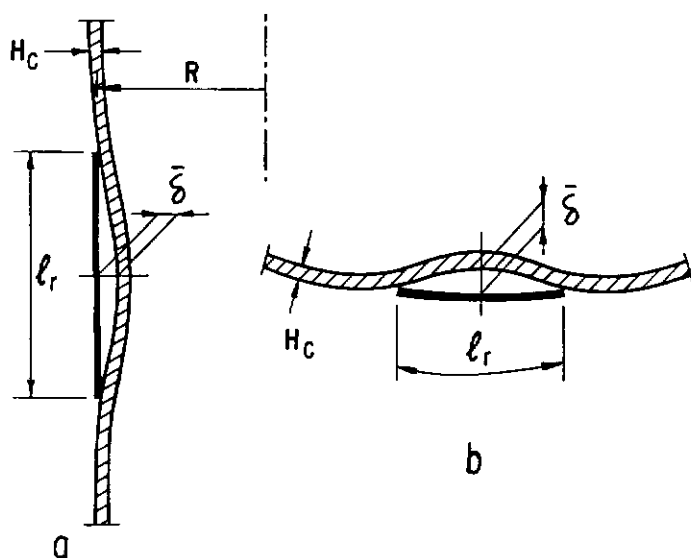


FIG. VI.1 — DESVIOS LOCAIS TOLERÁVEIS PARA CASCAS CILÍNDRICAS.

A partir de estudos de sensibilidade a imperfeições e em virtude dos resultados experimentais, fatores de redução de carga têm sido estabelecidos por norma<sup>38</sup> como também curvas empíricas têm sido estabelecidas<sup>34, 39</sup> na forma de limites inferiores para uma certa coleção de resultados experimentais.

Neste capítulo serão apresentados os resultados da carga de flambagem local da estrutura imperfeita, considerando imperfeições iniciais de caráter geométrico na forma de um modo crítico para a casca isotrópica e a casca enrijecida. Far-se-á, também, uma comparação crítica entre os resultados teóricos aqui obtidos, uma variada gama de resultados experimentais e cargas máximas recomendadas por normas internacionais.

## VI.2 - ANÁLISE DA CARGA DE FLAMBAGEM DE CASCAS CILÍNDRICAS SIMPLESMENTE APOIADAS

A partir dos resultados de  $\phi_{cr}$  obtidos no capítulo III e de sensibilidade a imperfeições,  $b$ , obtidos no capítulo V e usando a expressão (V.2) deduzida por Koiter<sup>29</sup>, foram obtidos os resultados apresentados na figura (VI.2) onde se relaciona o parâmetro teórico,  $\bar{P}_s$ , que representa uma estimativa da carga de flambagem, com  $Z$ . Cada curva na figura (VI.2) se refere a uma da amplitude de imperfeição,  $\bar{\delta}/H_c$ .

Verifica-se, para ambos os casos apresentados na figura (VI.2), que à medida que a imperfeição cresce há uma diminuição sensível da carga de flambagem, sendo esta redução mais drástica para pequenos valores de  $Z$ .

A figura (VI.3) apresenta uma comparação entre resultados experimentais<sup>13, 35, 36, 37</sup> e teóricos para cascas simplesmente apoiadas sob pressão hidrostática.

Deve-se observar que a curva 5 relativa a uma imperfeição de mesma magnitude que a espessura da casca já é suficiente para representar uma estimativa de limite inferior dos resultados experimentais, o que vem ao encontro de tolerâncias a imperfeições prescritas por normas<sup>38</sup>.

Apesar da comparação favorável entre resultados teóricos e experimentais, observa-se, entretanto, que a distribuição de pontos experimentais não segue exatamente o comportamento das curvas. Seria esperado com base nos dados teóricos que cargas experimentais de flambagem mais baixas fossem encontradas para valores de  $Z$  pequenos, entretanto se observa que as cargas mais baixas se concentram na região com  $Z$  em torno de  $10^3$ .

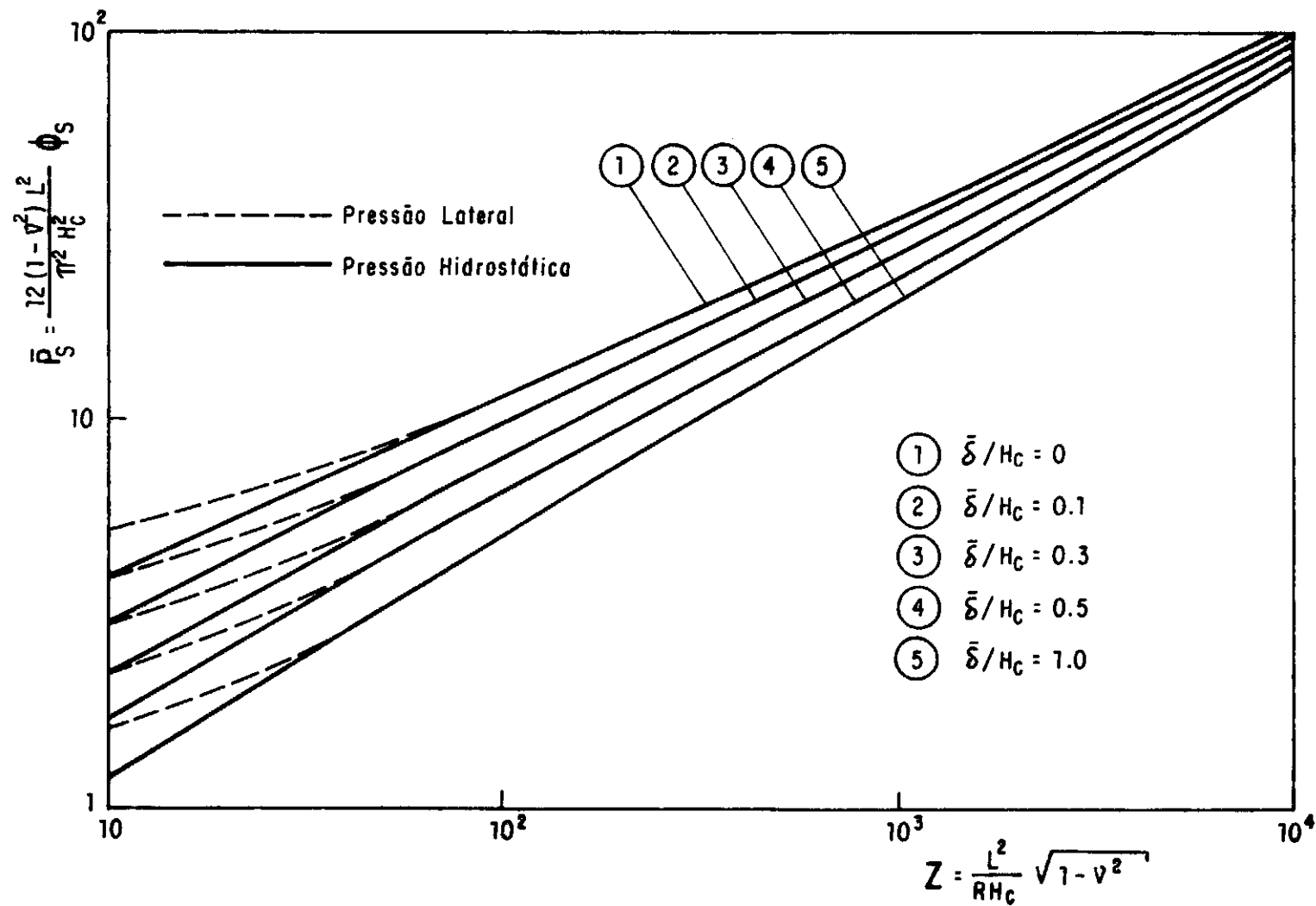


FIG. VI.2 — ESTIMATIVA DA CARGA DE FLAMBAGEM EM FUNÇÃO DO NÍVEL DE IMPERFEIÇÃO - CASCA ISOTRÓPICA.

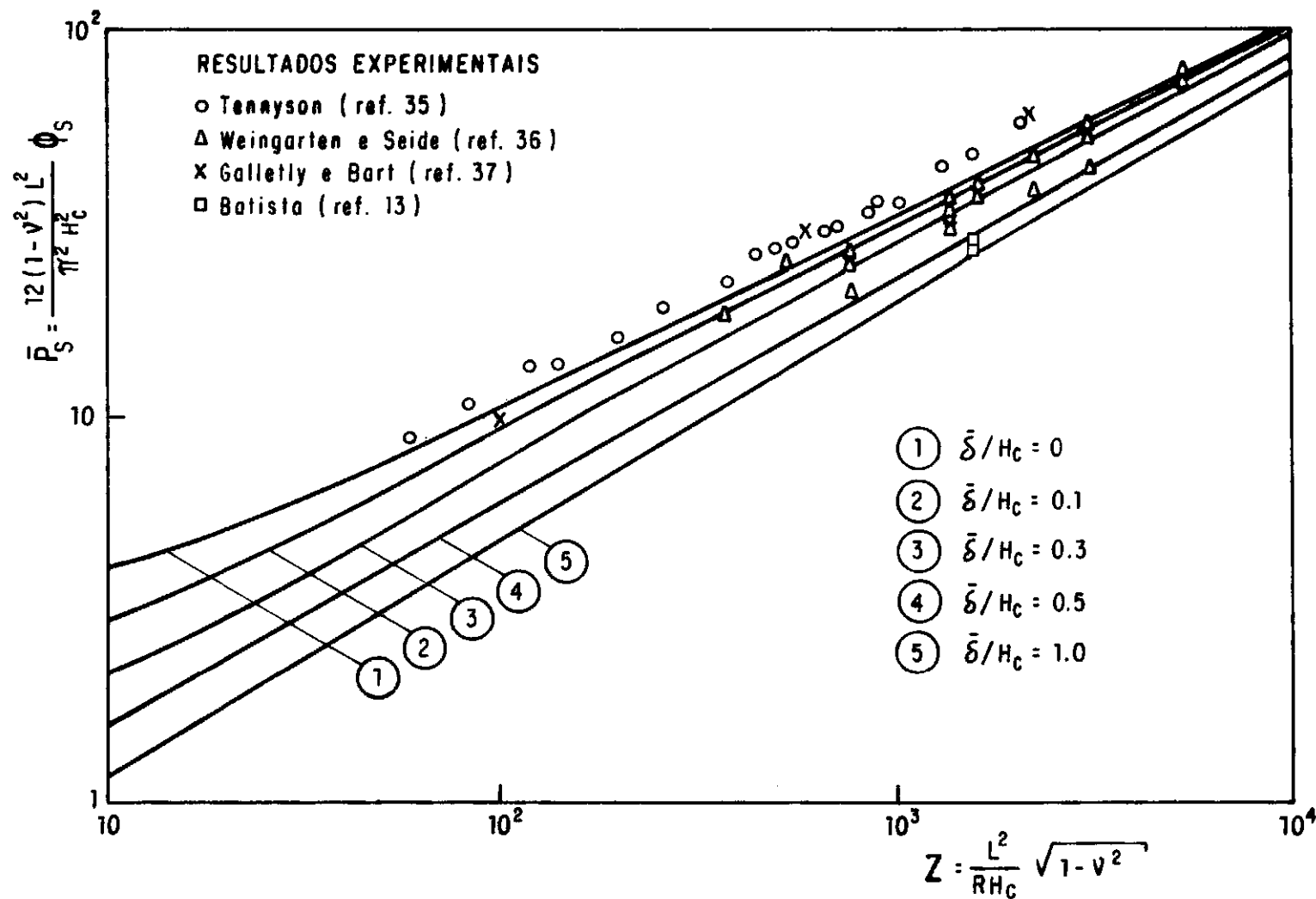


FIG. VI.3 – COMPARAÇÃO ENTRE RESULTADOS TEÓRICOS E EXPERIMENTAIS PARA CARGAS DE FLAMBAGEM - CASCA ISOTRÓPICA SOB PRESSÃO HIDROSTÁTICA.

Deve-se porém ressaltar a dificuldade de se estabelecer em laboratório condições de apoio simples, principalmente para cascas curtas ( $Z \leq 100$ ), região em que não existem dados experimentais. Na realidade as condições de apoio existentes nos ensaios se aproximam de uma situação de certo engastamento elástico. Esta incerteza de condições de apoio explica porque os resultados obtidos por Tennyson<sup>35</sup>, que são para cascas fabricadas com geometria "quase-perfeita", fornecem valores de cargas de flambagem superiores inclusive a curva 1 relativa à solução clássica para cascas perfeitas.

Na figura (VI.4), que relaciona o parâmetro  $\bar{P}_s$  com  $Z$ , são reapresentados os resultados experimentais da figura (VI.3), bem como a curva relativa à solução clássica devida a Batdorf<sup>15</sup>, a curva 5 da figura (VI.3), a curva tipo "lower-bound" obtida da referência<sup>13</sup> e a curva obtida usando os valores de  $\phi_{cr}$  e os fatores de redução indicado pela DNV<sup>38</sup>.

A curva de cargas de flambagem prescrita pela DNV tem o mesmo comportamento que aquelas apresentadas na figura (VI.3); mas, ao contrário da curva 5, verifica-se que na região de  $Z$  em torno de  $10^3$  ela fornece resultados para projeto que poderiam ser interpretados como sendo contra a segurança já que existem cargas experimentais de flambagem inferiores a estes valores prescritos. Convém ressaltar aqui as possíveis causas de discrepância entre os resultados teóricos do presente trabalho (curva 5) e aqueles prescritos pela DNV: os fatores de redução  $K_p$  (pressão lateral) e  $K'_p$  (pressão hidrostática) adotados pela DNV são relacionados na figura (VI.5) ao parâmetro  $Z$ . Estas curvas  $K_p(Z)$  e  $K'_p(Z)$  parecem ser baseadas nos resultados de sensibilidade a

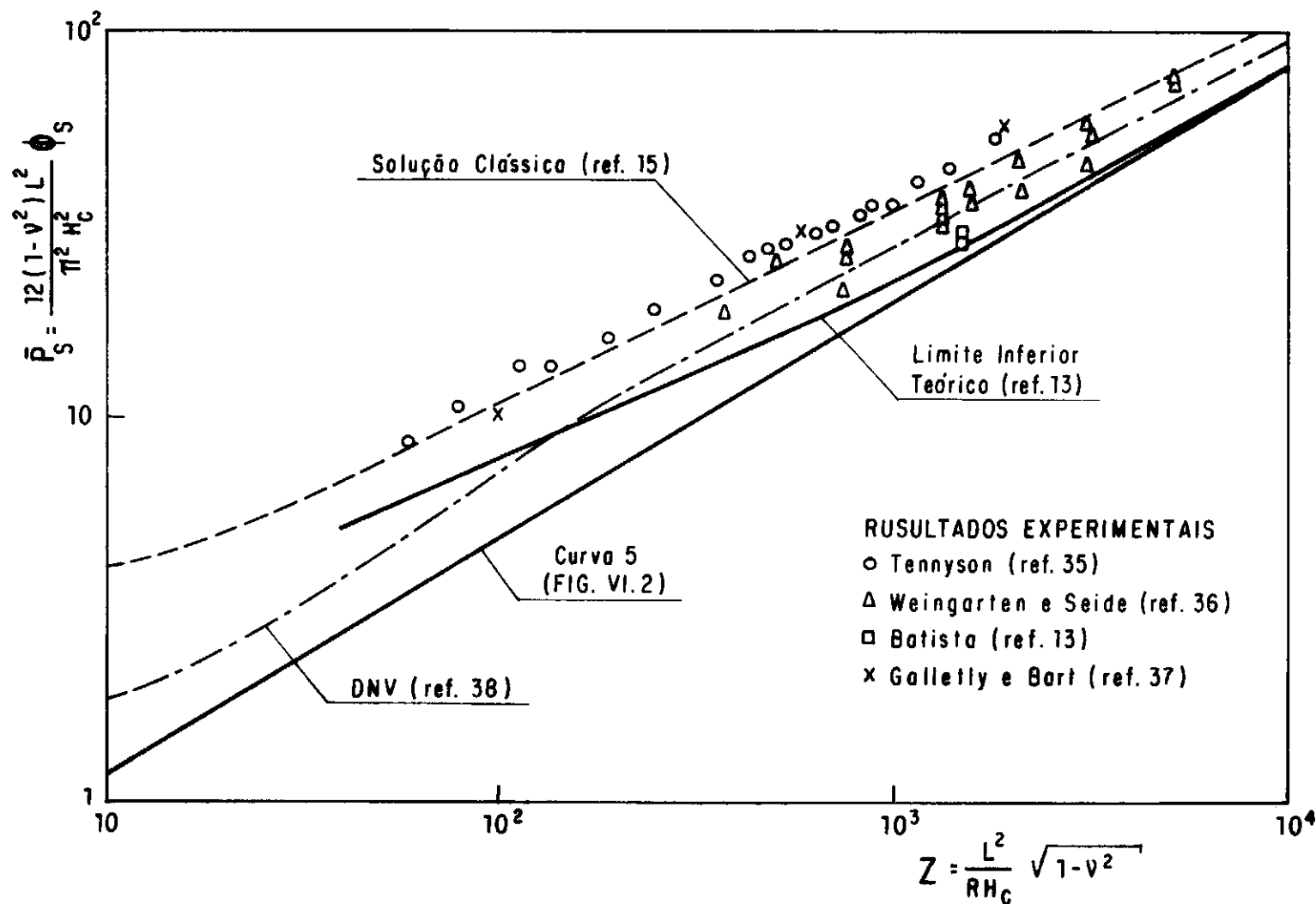


FIG. VI.4 - COMPARAÇÃO ENTRE RESULTADOS TEÓRICOS, EXPERIMENTAIS E RECOMENDAÇÕES DE PROJETO - CASCA ISOTRÓPICA

imperfeições obtidos por Budiansky<sup>1</sup> para a casca simplesmente apoiada sob pressão externa e dependeriam assim da magnitude de imperfeições aplicadas. Nota-se na figura (VI.6) que em cada caso de carga a variação do parâmetro  $b$  aqui obtido, que expressa o grau de sensibilidade a imperfeições, tem um comportamento semelhante ao relatado por Budiansky. Entretanto, como se vê nessa figura, existe uma acentuada diferença para pequenos valores de  $Z$  que é devida à exclusão, no trabalho de Budiansky, de termos contendo derivadas segundas de  $U$  e  $V$  nos membros direitos do sistema (IV.10).

A Figura (VI.7) mostra uma comparação análoga a da figura (VI.6) para o caso da casca enrijecida.

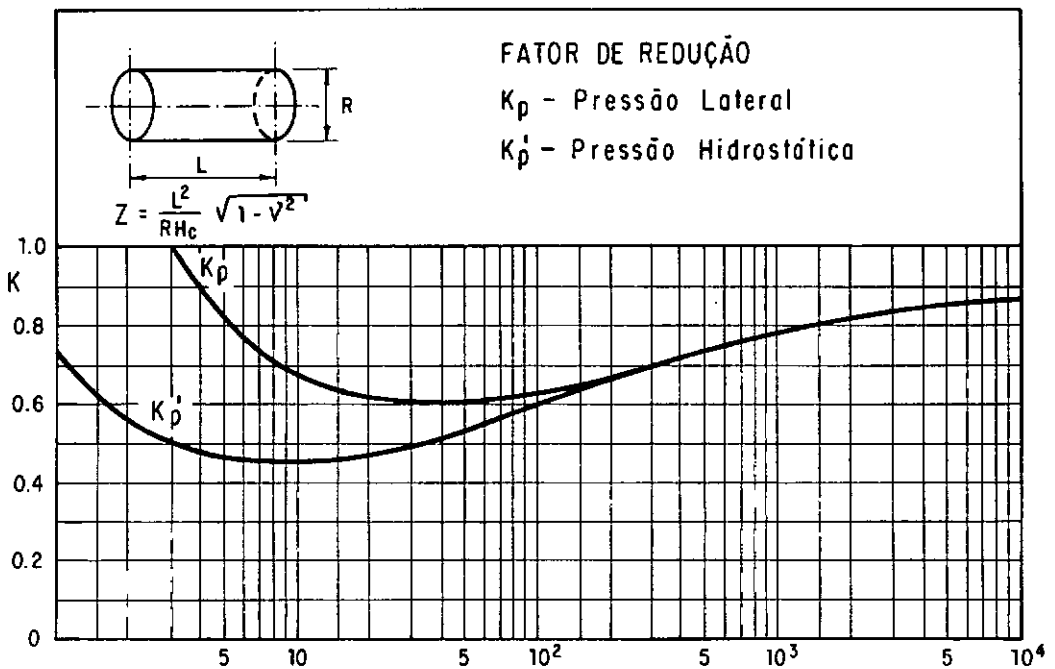


FIG. VI.5 — FATORES DE REDUÇÃO DE CARGA CRÍTICA TEÓRICA RECOMENDADOS PELA DNV.

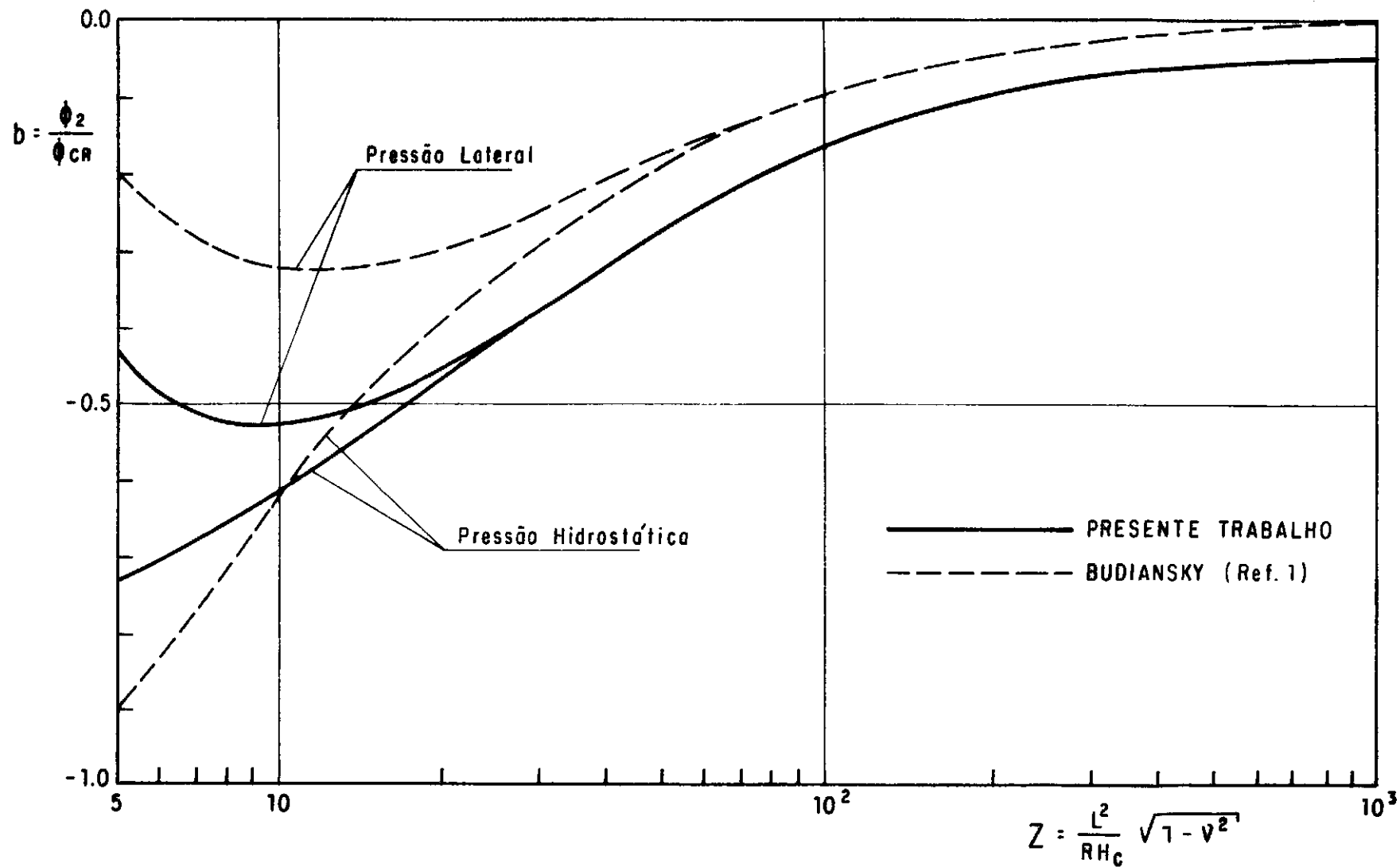


FIG. VI. 6 – COMPARAÇÃO ENTRE OS RESULTADOS DO PRESENTE TRABALHO E DE BUDIANSKY (Ref. 1) PARA SENSIBILIDADE A IMPERFEIÇÕES-CASCA ISOTRÓPICA SOB PRESSÃO EXTERNA.



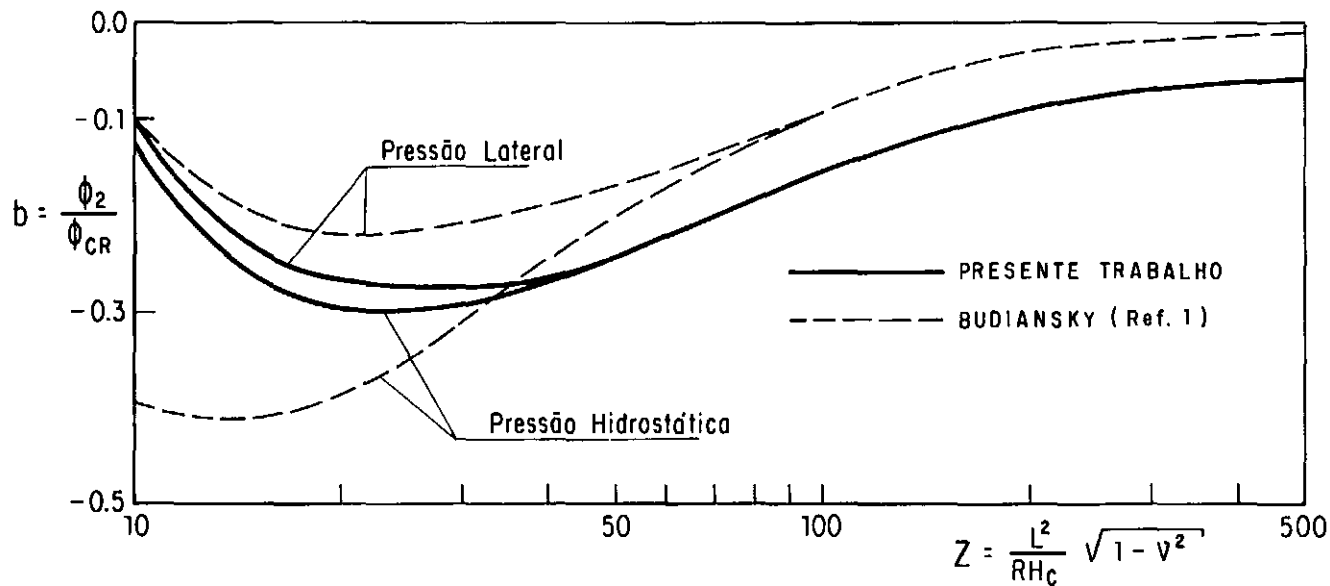


FIG. VI.7 — COMPARAÇÃO ENTRE OS RESULTADOS DO PRESENTE TRABALHO E DE BUDIANSKY (Ref. 1) PARA SENSIBILIDADE A IMPERFEIÇÕES - CASCA ENRIJECIDA.

A curva obtida da referência<sup>13</sup>, ao contrário, concorda com a distribuição dos dados experimentais, apresentando redução máxima de carga para cascas de comprimento médio ( $Z \sim 10^3$ ). A discussão sobre esta correlação teórico-experimental pode ser encontrada na referência<sup>13</sup> estando fora do escopo do presente trabalho que enfatiza o caso de cascas enrijecidas.

### VI.3 - RESULTADOS TEÓRICOS E EXPERIMENTAIS RELATIVOS À CARGA DE FLAMBAGEM DA CASCA ENRIJECIDA

Para o caso de cilindros enrijecidos por anéis, dois aspectos são de particular significação: o efeito deletério das imperfeições geométricas é menos severo que para o caso isotrópico e a carga crítica é igual ou superior a deste caso. Entretanto, mesmo para o cilindro enrijecido, existem discrepâncias entre resultados experimentais e a teoria clássica e fatores de redução apropriados devem ser ainda aplicados à carga crítica teórica para fins de projeto.

A partir de valores de  $\phi_{cr}$  e  $b$  calculados anteriormente e usando a equação (V.2), obtém-se as curvas apresentadas na figura (VI.8) onde se relaciona a carga de flambagem local,  $\bar{P}_s$ , com  $Z$  para vários níveis de imperfeições. Tem-se para a casca enrijecida um comportamento semelhante ao da casca isotrópica: a redução da carga cresce a medida que  $Z$  diminui e a medida que a amplitude da imperfeição,  $\bar{\delta}/H_c$ , aumenta.

Na figura (VI.9) são mostradas as curvas 1 (casca perfeita), 3 ( $\bar{\delta}/H_c = 0.3$ ) e 5 ( $\bar{\delta}, H_c = 1.0$ ) da figura (VI.7) juntamente com resultados experimentais obtidos para cascas enrijeci-

das com anéis esbeltos e espaçados sob pressão hidrostática<sup>30, 31, 32, 34</sup>. Constata-se nesta figura que há uma boa concórdância entre os resultados teóricos e experimentais. Observa-se que as cargas experimentais de flambagem mais baixas e a máxima redução teórica de carga acontecem para a mesma região que corresponde a pequenos valores de  $Z$ . Para grandes valores de  $Z$ , faixa de baixa sensibilidade a imperfeições, a redução teórica de carga decresce, acontecendo o mesmo com os resultados experimentais que se aproximam dos resultados obtidos para a casca perfeita (curva 1).

Ve-se que a curva 1 para a casca perfeita fornece um limite superior da carga de colapso da estrutura, enquanto a curva 5 correspondente a uma amplitude de imperfeições de mesma magnitude que a espessura da casca (desvio máximo recomendado por normas para a maioria das cascas usadas na prática) fornece um limite inferior para os dados experimentais conhecidos.

As curvas apresentadas nas figuras (VI.8) e (VI.9) são válidas para geometrias práticas de enrijecedores já que, como mostrado anteriormente, não há variação de  $\phi_{cr}$  e  $b$  para esses níveis de enrijecimento.

Na figura (VI.10), que relaciona  $\bar{P}_s$  com  $Z$ , são apresentadas as curvas 1, 3 e 5 da figura (VI.8), os resultados experimentais e as curvas recomendadas pela DNV<sup>38</sup>, pela NASA<sup>39</sup> e por Kinra<sup>34</sup> para cascas enrijecidas com anéis. Observa-se que essas curvas de projeto têm o comportamento semelhante as curvas apresentadas na figura (VI.8). A curva recomendada pela DNV, já apresentada na fig. VI.4 coincide com a curva 3 para  $Z \geq 100$ , tornando-se inferior a esta no intervalo  $10 \leq Z \leq 100$ . Esta curva ofere-

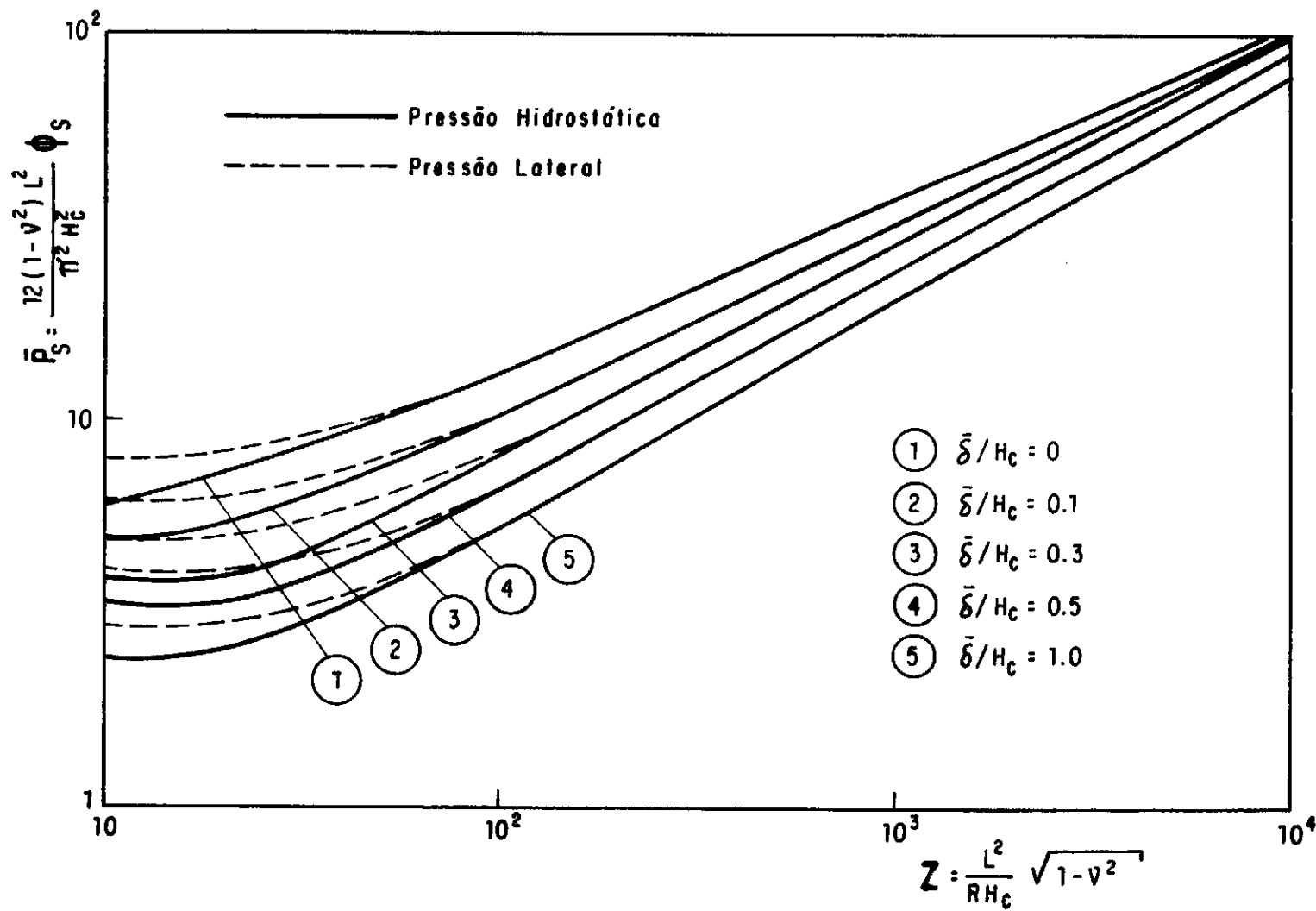


FIG. VI.8 - ESTIMATIVA DA CARGA DE FLAMBAGEM EM FUNÇÃO DA AMPLITUDE DA IMPERFEIÇÃO INICIAL  $\hat{\epsilon} = \bar{\delta}/H_c$  - CASCA ENRIJECIDA.

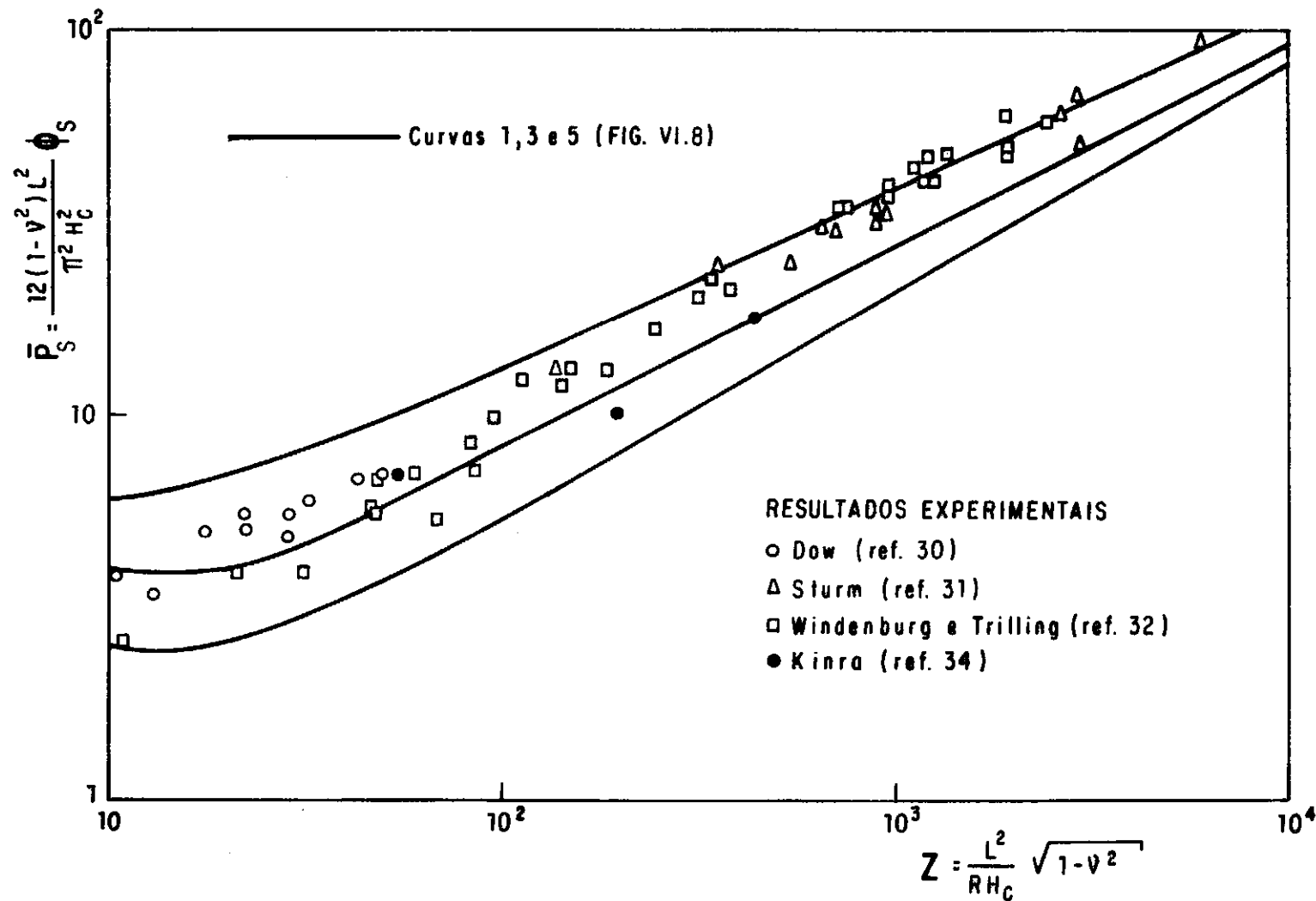


FIG. VI.9 – COMPARAÇÃO ENTRE RESULTADOS TEÓRICOS E EXPERIMENTAIS –  
 – CASCA ENRIJECIDA SOB PRESSÃO HIDROSTÁTICA.

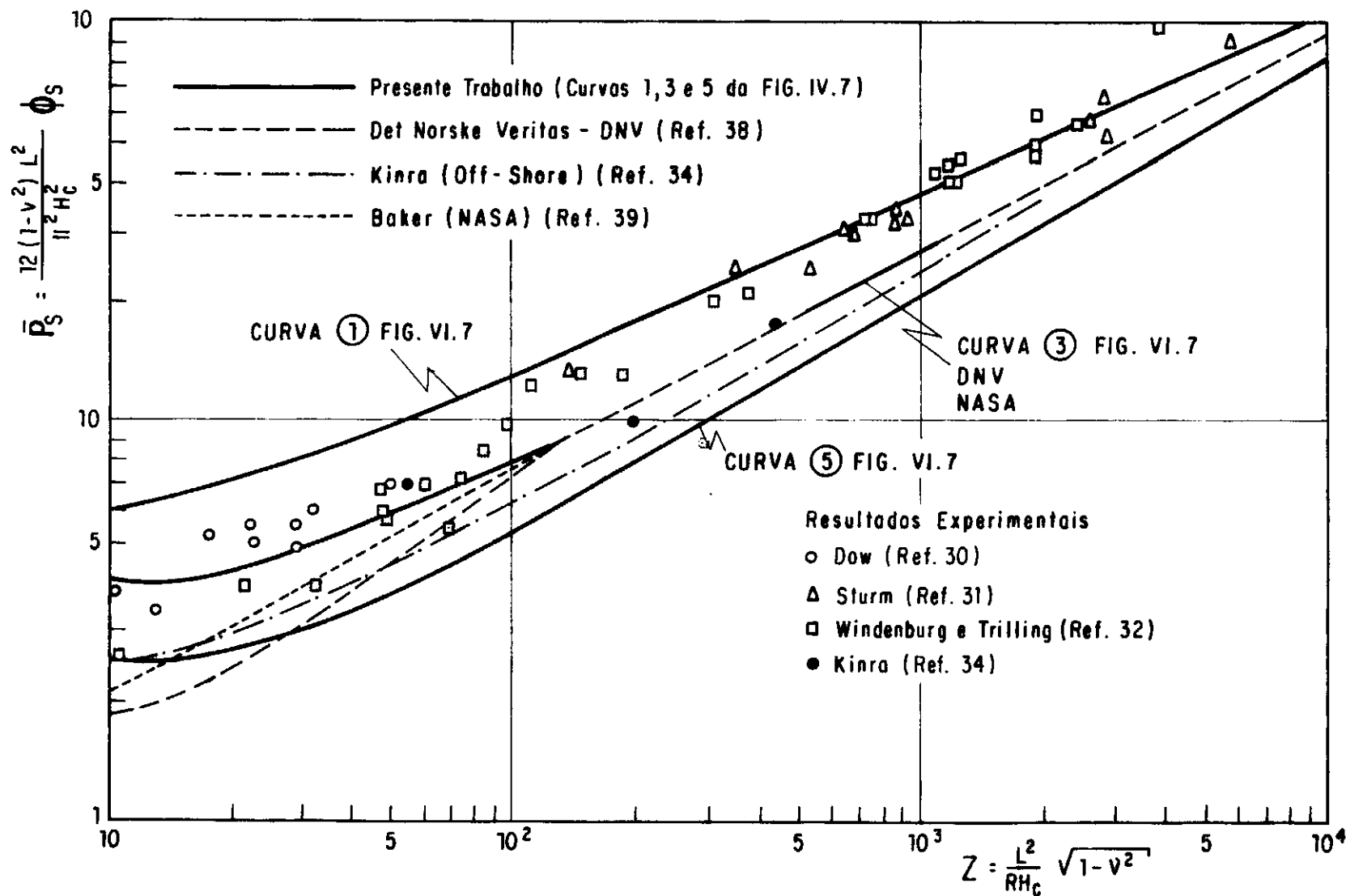


FIG. VI.10 — COMPARAÇÃO ENTRE RESULTADOS TEÓRICOS, EXPERIMENTAIS E CARGAS DE PROJETO PARA CASCAS ENRIJECIDAS SOB PRESSÃO HIDROSTÁTICA.

ce um limite inferior para a maioria dos dados experimentais, com exceção feita a um dos resultados associados ao colapso de um dos tanques de flutuação da plataforma Frigg descrito por Kinra<sup>34</sup>. A curva recomendada pela NASA para estruturas aeroespaciais praticamente coincide com a curva da DNV e a curva 3 para  $Z \geq 100$ . A curva recomendada por Kinra para estruturas off-shore é uma curva empírica construída a partir da distribuição de resultados experimentais. A curva 5 ( $\bar{\delta}/H_c = 1.0$ ) é inferior às outras curvas para  $Z \geq 20$ , constituindo um limite inferior para todos os resultados experimentais e pode ser usada com segurança para o dimensionamento de cascas cilíndricas enrijecidas com anéis esbeltos sob pressão externa.

Além disso as curvas aqui obtidas apresentam a vantagem de poder incorporar qualquer nível de imperfeição dentro das tolerâncias máximas de fabricação prescritas por norma.

## CAPÍTULO VII

### CONSIDERAÇÕES FINAIS



## CAPÍTULO VII

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

A estabilidade elástica de cascas cilíndricas enrijecidas por anéis esbeltos sob pressão externa foi investigada no presente trabalho, enfatizando-se a análise de pontos de bifurcação e do comportamento pós-crítico inicial.

A partir desta análise foi possível determinar a influência dos parâmetros geométricos, tanto da casca quanto do anel, sobre a carga crítica, modos críticos e sensibilidade a imperfeições. A partir destes resultados fez-se uma estimativa das cargas de flambagem em função de amplitudes de imperfeições iniciais na forma do modo crítico.

Fez-se, também, uma correlação entre os resultados obtidos e os resultados experimentais e de projeto.

A partir dos resultados obtidos e da análise destes resultados, algumas observações importantes podem ser feitas:

- A - A carga crítica da casca enrijecida é sensivelmente superior à da casca isotrópica para pequenos valores de  $Z$  (cascas curtas), decrescendo esta diferença a medida que  $Z$  cresce (cascas longas).
- B - Os enrijecedores tornam a casca cilíndrica menos sensível a imperfeições geométricas iniciais que a casca isotrópica, não chegando contudo a estabilizá-la. A sensibilidade a imperfeições deste tipo de estrutura explica a discrepância entre os

resultados obtidos pela teoria clássica e os resultados experimentais. Esta discrepância é mais proeminente para pequenos valores de  $Z$ , onde, justamente, a sensibilidade a imperfeições é mais acentuada.

- C - Tanto o aumento da carga crítica quanto a diminuição da sensibilidade a imperfeições da casca enrijecida em relação ao caso isotrópico se deve à presença do enrijecedor que ao funcionar como um apoio elástico restringindo as rotações, provoca a interação entre os modos críticos longitudinais e o consequente aumento do número de ondas circunferenciais crítico. Este efeito benéfico cessa além de um certo limite geométrico, função da profundidade e espessura dos anéis.
- D - Variando-se a geometria do enrijecedor dentro dos limites práticos não há variação de  $\phi_{cr}$  e  $b$ , devendo este ter, portanto, apenas as dimensões necessárias para que possa suportar a pressão radial sem que entre em colapso.
- E - A diferença entre os resultados de  $\phi_{cr}$  e  $b$  para a casca com e sem enrijecedores sugere que nas proposições de projeto deve-se fazer uma inclusão racional dos efeitos das condições de contorno introduzidas pelos anéis, principalmente para cascas médias e curtas. Para as cascas curtas este efeito parece ser tão grande quanto o efeito de imperfeições geométricas iniciais.
- F - Há boa concordância entre os resultados obtidos no presente trabalho e os resultados experimentais para o caso de casca enrijecida por anéis esbeltos. Nota-se, também, de uma maneira geral boa concordância entre os resultados obtidos e as curvas propostas por normas, dando, inclusive, respaldo teó

rico às mesmas para certos casos paramétricos. Verifica-se, entretanto, que as curvas apresentadas por normas (vide fig. VI.10) são superiores a alguns resultados experimentais em certas regiões, sendo porém conservadoras em outras. As curvas aqui obtidas têm a vantagem de incorporar qualquer nível de imperfeição dentro das tolerâncias máximas prescritas por norma, podendo-se então empregar os resultados aqui obtidos de uma maneira segura sem ser contudo conservadora.

G - Em resumo, o estudo paramétrico aqui apresentado fornece informações valiosas que podem ajudar o projetista não só na escolha das dimensões dos enrijecedores, como também na escolha do espaçamento dos mesmos para uma dada casca sob ação de pressão externa pré-fixada.

Como sugestões e observações para pesquisas futuras sobre o assunto pode-se citar:

- 1 - A análise da estabilidade assintótica de estruturas segundo a teoria de Koiter leva a cálculos laboriosos, principalmente no desenvolvimento da análise do caminho pós-crítico, originando equações cujo tamanho as torna de difícil manipulação e impede uma análise direta da influência dos parâmetros geométricos nas mesmas. Deve-se, portanto, procurar resolver os sistemas de equações diferenciais parciais e as integrais envolvidas no cálculo de  $\phi_{cr}$  e  $b$  através de um procedimento numérico.
- 2 - O estudo da influência da deformação dos anéis em estágios iniciais de pressão externa sobre a casca, por exemplo, a ovalização dos mesmos. Este estudo pode ser feito através de uma análise não linear da estrutura o que permite levar tam-

bém em consideração imperfeições geométricas tanto da casca quanto dos enrijecedores.

## LISTA DE SÍMBOLOS

## LISTA DE SÍMBOLOS

- $[A]$  - matriz do problema de autovalor (exp. II.40)
- $A_{ij}$  - amplitudes de modos de deformação (exp. II.36)
- $[B]$  - matriz do problema de autovalor (exp. II.40)
- $b = \phi_2/\phi_{cr}$  - parâmetro de sensibilidade a imperfeições
- $C = E H_C / (1-\nu^2)$  - constante de rigidez extensional
- $C_i$  - constantes definidos no texto (exps. II.31)
- $C$  - profundidade do enrijecedor
- $D = \alpha R^2 C$  - constante de rigidez à flexão
- $E$  - módulo de Young
- $H_C$  - espessura do cilindro
- $H_A$  - espessura do enrijecedor
- $h_c = H_C/R$  - espessura do cilindro adimensionalizada
- $h_a = H_A/R$  - espessura do enrijecedor adimensionalizada
- $I_i$  - integrais definidos no texto (exp. IV.21)
- $\underline{K}_c$  - tensor de curvaturas do cilindro
- $K_\xi, K_\theta, K_{\xi\theta}$  - componentes de curvatura do tensor  $\underline{K}_c$
- $\underline{K}_a$  - tensor de curvaturas do enrijecedor
- $K_\theta, K_\zeta, K_{\zeta\theta}$  - componentes de curvatura do tensor  $\underline{K}_a$
- $K_{hij}$  - expressões definidas no texto (exp. IV.13)
- $K_p, K'_p$  - fatores de redução de carga recomendadas pela DNV  
(Ref. 38)

- $L$  - comprimento da casca isotrópica ou distância entre dois enrijecedores
- $M_{ij}$  - momentos generalizados
- $M$  - número de modos longitudinais necessário à convergência de  $\phi_2$
- $M_i, m_i$  - número de semi-ondas longitudinais
- $NA$  - número de anéis
- $N_{ij}$  - esforços de membrana generalizados
- $\bar{N}_{ij}$  - integrais definidos no texto (exp. IV.18)
- $n$  - número de ondas circunferenciais
- $n_{cr}$  - número de ondas circunferenciais crítico
- $\bar{n} = n\pi/\lambda$  - parâmetro relacionado ao modo circunferencial
- $P$  - pressão
- $\bar{P} = 12(1 - \nu^2)L^2\phi/\pi^2H_c^2$  - parâmetro de carga adimensional
- $\bar{P}_{cr}$  - parâmetro de carga crítica
- $\bar{P}_s$  - parâmetro de carga de flambagem
- $q_i = (m_i \pi/\lambda)$  - parâmetro relacionado ao modo longitudinal
- $R$  - raio do cilindro
- $R_A$  - raio interno do enrijecedor
- $R_B$  - raio externo do enrijecedor
- $\vec{R}$  - vetor definido no texto (exp. IV.17)
- $r_a = R_A/R$  - raio interno do enrijecedor adimensionalizado
- $r_b = R_B/R$  - raio externo do enrijecedor adimensionalizado

$r_i = (m_i \pi / \lambda)$  - parâmetro relacionado ao modo longitudinal

$[S]$  - matriz definida no texto (exp. IV.16)

$\underline{U}$  - campo de deslocamentos dividido por  $R$ ,  $(u, v, w)$

$\underline{U}_0 = (u_0, v_0, w_0)$  - campo de deslocamentos referente ao estado fundamental

$\underline{U}_1 = (u_1, v_1, w_1)$  - campo de deslocamentos referente ao modo crítico

$\underline{U}_2 = (u_2, v_2, w_2)$  - campo de deslocamentos referente ao modo secundário

$u$  - deslocamento adimensional na direção do eixo  $x$

$V$  - energia potencial total

$v$  - deslocamento adimensional na direção do eixo  $y$

$w$  - deslocamento adimensional na direção do eixo  $z$

$\underline{X}$  - vetor das amplitudes dos modos críticos

$x$  - coordenada axial

$y$  - coordenada circunferencial

$Z = L^2 \sqrt{1 - \nu^2} / R H_C$  - parâmetro geométrico de Batdorf

$z$  - coordenada radial

\* \* \*

$\alpha = H_C^2 / 12 R^2$  - constante adimensional

$\beta = \begin{cases} 0 & \text{- pressão lateral} \\ 1/2 & \text{- pressão hidrostática} \end{cases}$

$\gamma = C/R$  - profundidade adimensional do enrijecedor

$\Delta_{mn}, \Delta_{ijkl}$  - funções definidas no texto



$\delta(\quad)$  - operador variacional

$\bar{\delta}$  - amplitude de imperfeição inicial

$\delta$  - função delta de Dirac

$\delta_{ij}$  - função delta de Kronecker

$\varepsilon$  - excentricidade do enrijecedor

$\hat{\varepsilon} = \bar{\delta}/H_C$  - parâmetro de perturbação

$\varepsilon_C$  - tensor de deformações específicas do cilindro

$\varepsilon_\xi, \varepsilon_\theta, \gamma_{\xi\theta}$  - componentes de deformação específica do tensor  $\varepsilon_C$

$\varepsilon_a$  - tensor de deformação específica do enrijecedor

$\varepsilon_\theta, \varepsilon_\zeta, \gamma_{\zeta\theta}$  - componentes de deformação específica do tensor  $\varepsilon_a$

$\theta = y/R$  - coordenada circunferencial adimensional

$\zeta = Z/R$  - coordenada radial adimensional

$\eta = H_A/H_C$  - razão entre a espessura do enrijecedor e do cilindro

$\lambda = L/R$  - comprimento adimensional

$\nu$  - coeficiente de Poisson

$\xi = X/R$  - coordenada axial adimensional

$\Phi = 8(1 - \nu^2) V/E H_C$  - funcional de energia

$\Delta\Phi$  - variação da energia potencial total ( $\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4$ )

$\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$  - componentes fundamental, linear, quadrática, cúbica e quártica da energia potencial total, respectivamente

$\Phi_{21}$  - funcional do segundo grau em  $\underline{U}_1$  e do primeiro grau em  $\underline{U}_2$  obtido da variação de  $\Phi$

$\phi = PR/E H_c$  - parâmetro de carga

$\phi_{cr}$  - parâmetro de carga crítica

$\phi_s$  - parâmetro de carga de flambagem

$\phi_1$  - parâmetro referente à inclinação da tangente do caminho pós-crítico em  $\phi = \phi_{cr}$

$\phi_2$  - parâmetro relacionado à curvatura do caminho pós-crítico em  $\phi = \phi_{cr}$ ; parâmetro de sensibilidade a imperfeições

$\nabla^4$  - operador bi-harmônico

### Símbolos

$(\sim)$  - vetor ou tensor

$\begin{bmatrix} & \end{bmatrix}$  - matriz

$::$  - equivalente ou proporcional

$,_{\xi}$  - operação de derivação em  $\xi = \partial/\partial_{\xi}$

$,_{\theta}$  - operação de derivação em  $\theta = \partial/\partial_{\theta}$

$,_{\zeta}$  - operação de derivação em  $\zeta = \partial/\partial_{\zeta}$

### Índices

A, a - referente ao enrijecedor (anel)

CR - quantidade crítica

C, c - referente ao cilindro

$\xi$  - relativo à direção axial

$\zeta$  - relativo à direção radial

$\theta$  - relativo à direção circunferencial

S - relativo à carga de flambagem

0 - estado fundamental

1 - estado incremental referente ao modo  $\underline{U}_1$

2 - estado incremental referente ao modo  $\underline{U}_2$  ou à curvatura do caminho pós-crítico

h, i, j, k, l, m, n - relativos a séries ou sequências de valores

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 - BUDIANSKY, B. and AMAZIGO, J.C. - Initial Post-Buckling Behavior of Cylindrical Shells Under External Pressure, Journal of Mathematics and Physics, Vol. 68, Number 1, p. 223-235, 1968.
- 2 - HUTCHINSON, J.W. and AMAZIGO, J.C. - Imperfection Sensitivity of Eccentrically Stiffened Cylindrical Shells, AIAA Journal, Vol. 5, p. 392-401, 1967.
- 3 - HUTCHINSON, J.W. - Initial Post-Buckling Behavior of Toroidal Shell Segments, Int. J. Solids Structures, Vol. 3, p.97-115, 1967.
- 4 - KOITER, W.T. - Over de Stabiliteit van Het Elastisch Evenwicht, Thesis, Delft, H.J. Paris, Amsterdam, 1945, English Translation Affdl-Tr-70-25, 1970.
- 5 - BUDIANSKY, B. - Theory of Buckling and Post-Buckling Behavior of Elastic Structures, in: Advances in Applied Mechanics, C.S. YIH (Ed.), Vol. 14, p. 1-65, Academic Press, New York, 1974.
- 6 - SEIDE, P. - A Reexamination of Koiter's Theory of Post-Buckling Behavior and Imperfection Sensitivity of Structures, In: Thin Shell Structures-Theory, Experimental and Design, Edited by Y.C. Fung and E.E. Sechler, Part II, p. 59-80, Prentice Hall, 1974.

- 7 - LANGHAAR, H.L. - Energy Methods in Applied Mechanics, Wiley, New York, 1962.
- 8 - BATISTA, R.C. - Estabilidade Elástica de Sistemas Mecânicos Estruturais, II EMAC, LCC/CNPq, Rio de Janeiro, 1981.
- 9 - BRUSH, D.O. and ALMROTH, B.O. - Buckling of Bars, Plates and Shells, McGraw Hill. Book Co., p. 142-182, 1975.
- 10 - TIELKING, J.T. - Asymmetric Bending of Annular Plates, Int. J. Solids Structures, Vol. 13, p. 63-74, 1979.
- 11 - YAMAKI, N. and TANI, J. - Postbuckling Behavior of Circular Cylindrical Shells Under Hydrostatic Pressure, ZAMM, Vol. 15, p. 709-711, 1971.
- 12 - BUSHNELL, D. - Evaluation of Various Analytical Models for Buckling and Vibration of Stiffened Shells, AIAA Journal, Vol. 11, p. 1283-1291, 1973.
- 13 - BATISTA, R.C. - Lower Bound Estimates for Cylindrical Shell Buckling, Ph.D Dissertation, University of London, 1979.
- 14 - WILKINSON, J.H. - Algebraic Eigenvalue Problem, Claredon, Oxford, 1965.
- 15 - BATDORF, S.B. - A Simplified Method of Elastic Stability Analysis for Thin Cylindrical Shells, NACA Report 874, 1947.
- 16 - EULER, L. - "Sur La Force des Colonnes", Hist. Acad. Sci. Berlin, p. 252-282, 1959.

- 17 - FLÜGGE, W. - Stresses in Shells, Springer Verlag, Berlin, 1960.
- 18 - BODNER, S.R. - General Instability of a Ring Stiffened Circular Cylindrical Shell, J. Appl. Mech., Vol. 24, p. 269-277, 1957.
- 19 - VAN DER NEUT, A. - The General Instability of Stiffened Cylindrical Shells Under Axial Compression, National Luchtvaart-Laboratorium, Rept. S - 314, 1947.
- 20 - WILSON, L.B. - Deformation Under Uniform Pressure of a Circular Cylindrical Shell Supported by Equally Spaced Circular Frames, Naval Construction Research Establishment, Report R/3376, 1956.
- 21 - BARUCH, M. and SINGER, J. - "Effects of Eccentricity of Stiffeners on the General Instability of Stiffened Cylindrical Shells Under Hydrostatic Pressure", Journal of Mech. Engineering Science, Vol. 5, p. 23-27, 1963.
- 22 - CZERWENKA, G. - Untersuchungen von dünnen kurzen Zylindern, die durch Ring-Kleinstprofile enger und mittlerer Teilung verstärkt sind und unter Mateldruck stehen, Zeitung Flugwissenschaft, 1961.
- 23 - KENDRICK, S. - The Buckling Under External Pressure of Circular Cylindrical Shells with Evenly Spaced Equal Strenght Circular Frames, Naval Construction Research Establishment, Report R/211, 1953.

- 24 - YANG, T.Y. and KUNOO, K. - Buckling of Cylindrical Shells with Smeared -Out and Discrete Orthogonal Stiffeners, AIAA Journal, Vol. 15, p. 1704-1711, 1977.
- 25 - MacNEAL, R.H.; WINEMILLER, A.F. and BAILIE, J.A. - Elastic Stability of Cylindrical Shells Reinforced by One or Two Frames and Subjected to External Radial Pressure, AIAA Journal, Vol. 11, p. 810-814, 1973.
- 26 - BRONOWICKI, A.J.; NELSON, R.B.; FELTON, L.P. and SCHMIT Jr., L.A. - Optimization of Ring Stiffened Cylindrical Shells, AIAA Journal, Vol. 13, p. 1319-1325, 1975.
- 27 - SOBEL, L.H. - Effects of Boundary Conditions on the Stability of Cylinders Subject to Lateral and Axial Pressure, AIAA Journal, Vol. 2, p. 1437-1440, 1964.
- 28 - SINGER, J. and HAFTKA, R.T. - Buckling of Discretely Stringer Stiffened Cylindrical Shells and Restrained Panels, AIAA Journal, Vol. 13, p. 849-850, 1975.
- 29 - KOITER, W.T. - Buckling and Post-Buckling Behavior of a Cylindrical Panel Under Axial Compression, NLR Rep. 5476, Rep. Trans, Aero Res. Int., 20, 1956.
- 30 - DOW, D.A. - Buckling and Postbuckling Tests of Ring Stiffened Cylinders Loaded by Uniform Pressure, NASA TN D-3111, 1965.
- 31 - STURM, R.G. - A Study of the Collapsing Pressure of Thin-Walled Cylinders, Bull. No. 329, Eng. Exp. Station, Univ. of Illinois, 1941.



- 32 - WINDERNURG, D.F. and TRILLING, C. - Collapse by Instability of Thin Cylindrical Shells Under External Pressure", Trans. ASME, Vol. 56, No. 11, p. 819, 1934.
- 33 - BUSHNELL, D. - Buckling of Shells-Pitfall for Designers, AIAA Journal, Vol. 19, p. 1183-1226, 1981.
- 34 - KINRA, R.K. (Shell Oil Co.) - Hydrostatic and Axial Collapse Tests of Stiffened Cylinders, 8th Annual Off-shore Technology Conference, May 3-6, Houston, Texas, 1976.
- 35 - TENNYSON, R.C. - The Effect of Shape Imperfections and Stiffening on the Buckling of Circular Cylinders, IUTAM Symp. on Buckling of Struc., Cambridge, Mass. Jun. 1974, B. Budiansky (ed.), Springer, 1976.
- 36 - WEINGARTEN, V.I. and SEIDE, P. - Elastic Stability of Thin-Walled Cylindrical and Conical Shells Under Combined External Pressure and Axial Compression, AIAA Journal, Vol. 3, p. 913-920, 1965.
- 37 - GALLETLY, G.D. and BART, R. - The Effect of Boundary Conditions and Initial out-of-roundness on the Strength of Thin-Walled Cylinders Subject to External Hydrostatic Pressure, J. Appl. Mech., Vol. 78, p.351-358, 1956.
- 38 - Rules for the Design, Construction and Inspection of Offshore Structures, Det Norske Veritas - 1977, DNV - Appendix - Steel Structures - Clause 3.4, May 1978.
- 39 - BAKER, E.H.; CAPELLI, A.P.; KOVALESKY, L.; RISH, F.L. and VERETTE, R.M. - Shell Analysis Manual, NASA CR-912, April, 1968.

40 - European Recommendations for Steel Construction, Buckling of Shells, Section 4.6, the Construction Press, London, 1981.